学籍番号：CD0206

信用リスクモデル
～構造アプローチを用いた社債の理論価格～
(要旨)

大学院商学研究科
博士後期課程　市場・金融専攻
石坂　元一

1　本論文の構成

第 1 章　イントロダクション
　1.1　本論文の目的と構成
　1.2　信用リスクモデルについての概説
　1.3　江戸っ子フレームワーク
第 2 章　構造アプローチについて
　2.1　Merton モデル
　2.2　First-Passage-Time モデル
　2.3　拡張モデルへの動機付け
第 3 章　構造アプローチにおける拡張モデル
　3.1　基本モデル
　3.2　社債の理論化格式導出の例
第 4 章　数値計算による考察
　4.1　数値計算の手法
　4.2　First-Passage-Time モデルにおける社債価格の考察
　4.3　拡張モデルにおける社債価格の導出
第 5 章　まとめと今後の課題
　5.1　まとめ
　5.2　今後の課題

APPENDIX

2　本論文の目的

本論文の目的は以下の 3 つである．

1. 既存の構造アプローチに属するモデルを整理する (第 2 章).
2. 構造アプローチの範疇で，拡張モデルを提示し，社債の理論価格を導出する (第 3 章).
3. 導出した社債の理論価格を数値計算により考察する (第 4 章).

信用リスクを計量化するアプローチの一つである構造アプローチでは，一般的に企業価値が予め決められた低いレベルに落ち込んだ最初の時刻をデフォルト時刻として，信用リスクのある債券 (社債) の理論価格を求めている．構造アプローチの問題点の一つとして，その低いレベルの推定が難しいことが挙げられる．また，企業価値を定義したとしても，その企業価値があるレベルに触れた瞬間にデフォルトするとは考えにくい．むしろ，企業価値がある低い範囲にある時間留まっていたらデフォルトすると考えたり，企業価値が一旦低いレベルに落ちこんでそのレベルから中々持ちなおさないならばデフォルトすると考えたりする方が自然ではないだろうか．このような問題意識から，もっと柔軟性のあるデフォルトの定式化を試みた．

3　第1章　イントロダクション

信用リスクモデルの概説と江戸っ子フレームワークについて述べる．信用リスクとは，企業が債務不履行 (デフォルト) を起こしそれにより被る損失の可能性のことでありデフォルトリスクとも呼ばれる．一口にデフォルトと言っても，契約形態により多様かつ複雑である．それでは第 1 に，信用リスクを計量化するには何を指標にすればよいのか，第 2 にどのような数理モデルが必要であるか．第 1 の問に対しては，社債と格付けが挙げられる．第 2 の問に対しては，大別して構造アプローチ (Structural approach) と誘導型アプローチ (Reduced-form approach) とが挙げられる．構造アプローチとは，企業価値 (その多くは企業の資産価値) の変動プロセスをベースにデフォルトが内生的にモデル化されるものである．誘導型アプローチでは，デフォルト過程を外生的に与えるものである．具体的にはハザードレートや格付推移行列が用いられたりする．

第 3 章で社債の理論価格を導出するためのモデルを立てる際に，江戸っ子フレームワークと呼ばれるものを用いる．江戸っ子フレームワークはバリアオプションの新しいフレームワークである．ここで江戸っ子フレームワークを簡単に説明する．まず原資産価格を S_t として，それがレベル A に最初に触れる初到達時刻を τ_A で記す．この時刻を Caution Time と呼ぶ．次に $g \geq \tau_A$ であるような $\mathcal{F}_T$-可測確率変数 g を導入する．この g を K.O.Time とよぶ．通常のバリアオプションは τ_A でノックアウトするが，江戸っ子オプションの場合は τ_A では警告が与えられるだけである．g でノックアウトするのである．本論文ではこの g をデフォルト時刻としてモデル化する．

4　第2章　構造アプローチについて

構造アプローチの出発点となるモデルは Merton のモデルである．そこでは，一種類の割引債と equity との 2 つの請求権を発行している企業を考える．割引債は満期 T において額面 L が支払われる約束であるが，満額払えない場合すなわちデフォルトした場合，満期での企業の資産価値 V_T が支払われる．このように設定すると，割引債保有者への満期でのペイオフはプットオプションのペイオフ式を用いて表すことができる．割引債の価格式は Black-Sholes 式を適用することで求まる．Merton モデルはシンプルなモデルであるので様々な拡張がなされた．確率金利モデルを用いたモデルとしては，Shimko, Tejima & Deventer がある．そこでは，金利に Vasicek モデルを採用している．Geske では，コンパウンドオプションの枠組みを用いて利付債の評価を行い，Cox, Ingersoll & Ross では，変動利付債の評価を行っている．また，Vasicek では短期の負債と長期の負債を織り込んだモデルを設定している．その他，信用リスクを考慮したデリバティブの価格付けとして，Johnson & Stulz や Klein がある．Merton モデルでは満期にのみデフォルトの判定が行われていた．デフォルトが期中に起こることも考慮に入れたのが，First-Passage-Time モデルである．デフォルト時刻はデフォルト境界への企業価値の初到達時刻としてモデル化される．企業価値がある低いレベルまで下がったならば，債券保有者は企業価値の所有権を主張できるという状況をモデル化したものである．First-Passage-Time モデルは Merton モデルに比べてかなり柔軟性が増す．期中デフォルトを許すことはもちろんだが，デフォルト境界も決定論的である必要はなく確率的でもよい．また，回収額も様々な方法でモデルに織り込むことができる．この First-Passage-Time モデルで代表的なモデルは，カーブしたデフォルト境界を用いた Black & Cox，確率金利モデルを採用した Longstaff & Schwartz，デフォルト境界を割引債を用いて表現し

た Briys & de Varenne，企業価値として資産価値ではなくデフォルトを決定付けるようなシグナリング・プロセスを用いた Cathcart & El-Jahel 等が挙げられる．

デフォルト時刻を「デフォルト境界に触れた瞬間」からもう少し柔軟性のある定式化をしてもよいのではないか．次章では柔軟性のある定式化として，江戸っ子フレームワークを用いる．

5　第 3 章　構造アプローチにおける拡張モデル

デフォルトについて次のようなモデル化をした．まず，企業価値 V のレベル A への初期到達時刻 τ_A を以下で定義する．

$$\tau_A := \inf\{t > 0 | V_t = A\}, \quad (\inf \emptyset = \infty)$$

ただし，A は $A < L$ を満たす正の定数とする．この時刻 τ_A を「警告時刻」と呼ぶ．次に，τ_A に依存した停止時刻を $g(\tau_A)$ で記し，これを「デフォルト時刻」と呼ぶ ($g(\tau_A) \geq \tau_A$)．$g(\tau_A)$ の導入が従来の First-Passage-Time モデルを拡張した点である．$g(\tau_A)$ については次節で具体的に定式化する．事象 $\{g(\tau_A) \leq T\}$ を「期中のデフォルト」と呼ぶ．また，$g(\tau_A) > T$ の場合には，割引債の満期において企業価値が額面を下回っていればデフォルトとし，これを「満期のデフォルト」と呼ぶ．つまり事象 $\{g(\tau_A) > T, V_T \leq L\}$ のことを「満期のデフォルト」と呼ぶ．
社債保有者は期中のデフォルトあるいは満期のデフォルトが起こった場合，直ちにその企業を清算し企業価値からデフォルトにかかるコストを引いた分を受け取るとする．すると，社債保有者への満期でのペイオフは以下のように分類できる．

1. 期中のデフォルトが起こらず，かつ満期のデフォルトも起こらなかった場合 ($V_T \geq L$)，ペイオフは額面 L とする．
2. 期中のデフォルトが起こらず，かつ満期のデフォルトが起こった場合 ($V_T < L$)，ペイオフは $\beta_1 V_T$ とする．ただし，$\beta_1 \in [0, 1]$ は定数とする．
3. 期中のデフォルトが起こった場合，直ちに清算し期中のデフォルト時刻における企業価値の一部を受け取り，満期まで無リスク債券で運用するものとするすると，満期におけるペイオフは，$e^{r(T-g(\tau_A))}\beta_2 V_{g(\tau_A)}$ となる．ただし，$\beta_2 \in [0, 1]$ は定数とする．

これら 3 つをまとめて，満期における社債保有者へのペイオフ X_T は，

$$X_T = L\mathbf{1}_{\{g(\tau_A)>T, V_T \geq L\}} + \beta_1 V_T \mathbf{1}_{\{g(\tau_A)>T, V_T<L\}} + e^{r(T-g(\tau_A))}\beta_2 V_{g(\tau_A)} \mathbf{1}_{\{g(\tau_A) \leq T\}} \tag{1}$$

と表せる．$g(\tau_A)$ を具体的に 4 通りの方法で定式化することにより，社債の理論価格を closed-form で導出した．

1. $g(\tau_A) := \tau_A$
   これはデフォルト時刻=警告時刻なので First-Passage-Time モデルである．

2. $g(\tau_A) := \inf\{t \geq \tau_A | \int_{\tau_A}^{t} \mathbf{1}_{(-\infty, A]}(V_u)du > \alpha T\}, \quad (\inf \emptyset = \infty)$
   ただし，$\alpha \in [0, 1]$ は定数とする．満期までにレベル A を下回る時間が αT を超えたらその時

点でデフォルトとするモデルである．

3. $g(\tau_A) := \inf\{t \geq \tau_A | \int_{\tau_A}^{t} \mathbf{1}_{(-\infty,A]}(V_u)du > \alpha(T-\tau_A)\}$
これは満期までにレベル A に触れ，さらにそこから満期までにレベル A を下回る時間が $\alpha(T-\tau_A)$ を超えたらその時点でデフォルトとするモデルである．

4.
$$g(\tau_A) := \begin{cases} (1-\alpha)\tau_A + \alpha T & \text{if } \tau'_B > (1-\alpha)\tau_A + \alpha T \\ \infty & \text{if } \tau'_B \leq (1-\alpha)\tau_A + \alpha T, \end{cases}$$
と定義する．ただし，
$$\tau'_B := \inf\{t \geq \tau_A | V_t = B\}, B > A$$
とする．これは満期までにレベル A に触れ，さらに $(1-\alpha)\tau_A + \alpha T$ までに A より高いレベル B に到達しなければその時点でデフォルトとするモデルである．

6　第 4 章　数値計算による考察

第 3 章で導出した社債価格を数値計算により比較を行った．価格式には k 次元積分も含まれるので $(k = 1, 2, 3, 4)$，準モンテカルロ法を用いた．

数値計算において興味深かった点は，First-Passage-Time モデルにおいて，横軸にデフォルト境界，縦軸に社債価格をとると，右上がりの形状を示すことである．直観的には，デフォルト境界が上がるにつれてデフォルトの可能性が高くなり，社債の信用リスクが高まるゆえに社債価格は低くなっていく，と考えられる．江戸っ子フレームワークを用いた社債価格でも，α を横軸にとると右下がりの形状を示す社債がある．直観的には，α の上昇はいわばデフォルト条件を緩和しているようなものなので，社債価格は高くなると考えられる．これら 2 つの例はともに，(1) 式の第 3 項にかかっている β_2 を小さくすることで，形状は変わってくる．

7　第 5 章　まとめと今後の課題

今後の課題としては，以下がある．

- 実証分析：本論文では従来のモデルを拡張したモデルを提示し，その下で社債の理論価格を導出し数値計算を行った．しかし，実証分析には至っていない．つまり，従来のモデルよりも本当に本論文で提示したモデルが現実のデフォルトをモデル化していると言えるのか，という問題が残っている．
- モデル：本論文では非常にシンプルなモデルを提示していたので，負債構造を課す，レベル A の形状を工夫する，確率金利モデルを導入するなどの拡張が考えられる．

- クレジット・デリバティブへの応用：本論文の枠組みはクレジット・デリバティブの価格付けや商品設計に適用できるのか.
- クレジット・スプレッド：これは信用リスクを論じるときにはしばしば用いられるが，本論文では社債の価格そのものに焦点を当てていたためほとんど触れなかった.