レヴィ市場に固有なバリアオプション：Lizard Option

川西　泰裕

通常のone touch barrier option は，そのオプションを意図的に消滅あるい は発生させることが可能であるという点で問題があることが以前から知られ ている．例えばアップアンドアウトコールオプションの発行者は，株価が所与 のバリア水準に近づいた時，株を大量に買って株価を意図的にバリアに当て ることによってオプションの支払いから免れることが可能である．このいわゆ る価格操縦に対するバリアの脆弱さの問題に対して，これまでに様々な解決 方法，より正確にはバリアの強化方法が提案されてきた．例えばCumulative Parisian Option, Simple Parisian Like Option, Local Time Barrier Option などが挙げられる．

その様な流れを受けて著者は最近，価格操縦に対して抑止効果を持ち，か つレヴィ市場（資産価格過程が幾何レヴィ過程としてモデル化された資産市 場モデルのこと）に固有なバリアオプションとしてLizard Option を開発し た．その定義は以下である．

定義 $\{X_t\}$ を R-値レヴィ過程，$s > 0$ として株価過程を $S_t = se^{X_t}$ と定義す る（もちろん S_t は特に株価である必要は無く，原資産価格ならば何でもよい）． $r > 0$ を無リスク金利とする．この時，以下で定義される PAYOFF をその所 有者に時点 $T+\eta$ において支払うデリバティブをtail length $\xi > 1$, tail width $\eta > 0$, strike price K, barrier level $A > s \vee K := \max\{s,K\}$, maturityness T を持つ*Lizard Option* または*Hit & Run Shift Barrier Option* と言う．

$$\text{PAYOFF} := \left(S_T e^{r\eta} - K\right)^+ \left(1_{(\tau > T)} + 1_{(\tau \leqq T)} 1_{(S_\tau / S_{\tau-} \geqq \xi)} 1_{(\sigma - \tau \leqq \eta)}\right)$$

但し τ は株価の上側バリア A への初到達時刻，σ は株価が時刻 τ 以降におい て初めて下側バリア $\sqrt{S_{\tau-}S_\tau} \wedge A := \min\left\{\sqrt{S_{\tau-}S_\tau}, A\right\}$ に到達する時刻と して以下のように定義される．

$$\begin{aligned}
\tau &:= \inf\{t > 0 \,;\, S_t \geqq A\} = \inf\{t > 0 \,;\, X_t \geqq a := \log(A/s)\} \\
\sigma &:= \inf\{t > 0 \,;\, t \geqq \tau,\, S_t \leqq \sqrt{S_{\tau-}S_\tau} \wedge A\} \\
&= \inf\{t > 0 \,;\, t \geqq \tau,\, X_t \leqq a \wedge \frac{X_{\tau-} + X_\tau}{2}\}
\end{aligned}$$

つまり簡単に言えば，時刻T までに株価が A に到達しなかった場合だけで なく，時刻 T 以前に株価が一定の大きさ以上の正のジャンプで以って A と交 差しかつその後の短期間の内に元の水準に戻った場合にもコールオプション が支払われることになる．

本稿ではこのLizard Option に関する研究結果についてまとめる．

本稿の構成を今から述べる．

まず前述のようにLizard Option はレヴィ市場に固有なデリバティブなの で，Lizard Option を理解するためにはレヴィ過程の知識が必要不可欠である． そこで第0 章ではレヴィ過程に関する基本的な結果と，後にLizard Option の価格計算を行う際に必要となる結果についてまとめる．具体的には以下の 項目について述べる．

- レヴィ過程の定義とその代表例
- レヴィ過程の特徴付け（レヴィ・ヒンチン表現）
- レヴィ・伊藤分解，及びレヴィ過程のサンプルパスの性質
- レヴィ過程の分布的性質
- レヴィ過程の従属操作
- レヴィ過程の強マルコフ性
- ウィーナー・ホップ分解
- 初到達時刻に関連する分布

そして第1 章ではまずLizard Option が誕生した背景についてまとめる． 具体的には第1 に，過去に実際に価格操縦によってバリアの突破が企てられ， one touch barrier option が抱える問題点が浮き彫りにされ，この出来事以降 に次々と改良型バリアオプションが開発されていったという一連の流れにつ いてまとめる．そして第2 に，デリバティブ評価を目的とした幾何レヴィモデ ルの発展について簡単にまとめる．そして背景を整理した上でLizard Option の開発コンセプトを述べる．

そして第2 章では前章で述べたコンセプトの下で実際に開発されたLizard Option の定義を与え，その名前の由来や金融商品としての特徴についてまと める．また第2 章ではLizard Option の価格計算も行う．価格評価法としては リスク中立評価法を採用する（正確にはrisk-neutral modelling という考え方 に従い，最初からリスク中立確率の下で株価過程をモデル化する）．そして具 体的な計算結果を与えるために，リスク中立確率の下で株価過程 $\{S_t\}$ は幾何 Variance Gamma 過程に従うものとする．つまり対数株価過程 $\{\log(S_t/S_0)\}$ は以下で定義される．

$$\log(S_t/S_0) := \theta G_t + \delta W_{G_t} \qquad \text{for } t \geqq 0$$

但し{Wt} は1 次元標準ブラウン運動であり，$\{G_t\}$ は$\{W_t\}$ とは独立なガンマ過程（1 次元周辺分布がガンマ分布に従う単調増加なレヴィ過程）である．つまり対数株価過程はドリフト付ブラウン運動のガンマ過程による時間変更（従属操作）として定義される．そしてこの設定の下で，第0 章で用意しておいたウィーナー・ホップ分解，強マルコフ性，それから初到達時刻とその時刻およびその時刻の直前において評価したレヴィ過程の値の同時分布やレヴィの反転公式といったテクニックを用いてLizard Option の価格計算が展開されてゆく.

最後に第3 章では本稿の貢献と課題について考える.