



## Hitotsubashi ICS-FS Working Paper Series

FS-2013-J-003

### 為替時系列のための統計モデルとその投資戦略への応用

佐久間 吉行

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科

横内 大介

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科

First version: October 30, 2013

All the papers in this Discussion Paper Series are presented in the draft form. The papers are not intended to circulate to many and unspecified persons. For that reason any paper can not be reproduced or redistributed without the authors' written consent.

# 為替時系列のための統計モデルとその投資戦略への応用

佐久間 吉行<sup>\*</sup>, 横内 大介<sup>†</sup>

## 概要

本稿では、為替のトレーダーの視点のモデル化を「1. 時変パラメータを持つ自己回帰モデル」と「2. マハラノビス距離を用いた転換点候補の検出」を通じて試みた。そして相場の方向性(状態)の検出のために、符号付き転換指標を新たに導入してシグナルの検出を行った。その結果、この2つの手法からなるフレームワークが実際の為替データに対しても十分機能することが分かった。さらにこのフレームワークの実データへのあてはめと並行して、トレンド発生時の特徴を調査し、投資戦略を立てた。この戦略に基づき仮想的な取引を行った結果、トレーダーレプリケーションの可能性が示唆された。

## 1 はじめに

為替のトレーダーは、常に現在の相場がどのような状態にあるか、たとえばトレンドなのかボックスなのかを意識しながらトレードを行っている。そして、その状態が遷移するタイミングを適切に見計らってポジションを調整し、収益を上げることを目指している。しかしながら、このような相場状態の変化を見出すことは簡単ではない。そのためトレーダーは、ファンダメンタルズに注意を払う、テクニカル分析を活用するなどさまざまな試行錯誤を通して相場状態の転換点を探り、常時ポジションの調整を行っている。

このような相場状態の変化は当然、為替時系列の動きそのものに影響を与える。そこで我々は、指数重み付共分散 [4] に基づいた時変 AR モデル [7] というリアルタイムな時系列データにもあてはめ可能な時系列モデルを活用し、相場の切り替え点の候補をそのパラメータや統計量の変化から即時に検出する枠組みを

---

<sup>\*</sup>一橋大学大学院国際企業戦略研究科, yoshiyuki.sakuma777@gmail.com

<sup>†</sup>一橋大学大学院国際企業戦略研究科, yokouchi@ics.hit-u.ac.jp

構築した。さらに、本稿では、この枠組みを活用した新たな投資戦略を立て、そのパフォーマンスの検証も合わせて行った。

## 2 モデル化に向けての指針

本節では、為替取引のモデル化にあたって我々が取った3つの指針を説明する。

1つ目の指針は為替のレベルデータをモデル化の対象にするということである。為替取引の参加者は、輸出入などの実需に基づく参加者、実需参加者の受け手としての銀行などの金融機関、FX取引に見られる投機的な参加者などが挙げられる<sup>1</sup>。これらの参加者のもと、外国為替は、市場参加者の需給、物価や金利、マネーサプライなどの経済要因、変動相場制への移行、プラザ合意などにみられる政治要因などと相互に関係しあって変動し続けている。こうした変動の情報は為替そのものの動きに良く表われるので、そのレベルデータは、現場のトレーダーには重要な情報源である。例えば、重要な情報の1つに為替の水準がある。実際、今まで円高だったドル円（JPY）が100円を超える直前の動きと、98.60円直前の動きは異なることをトレーダーは経験的にわかっている。この局面での100円は一種の抵抗線になって、たとえばここを突破するかしないかでもみ合う状態が生じることも珍しくない。多くの場合ではこのような切のよい値が抵抗線になりやすいが、そうでない価格で状況では抵抗線になることもある。たとえば75.32円は、2011年10月末につけたドル円（JPY）の史上最高値であり、突破するかしないかでもみ合う局面が生じるは容易に想像されるし、日銀介入などの可能性も飛躍的に上昇する。このように為替取引では、レベルデータの中にその時々トレーダーが決める暗黙の閾値が存在する。そのため、トレーダーの視点を正しく捉えたモデルを構築しようとするならば、理論的に扱いやすい収益率データではなく、扱いが難しいものの多くのトレーダーが着目するレベルデータを分析に用いる方が望ましい。そこで本稿ではレベルデータそのもののモデル化を試みることにした。なお、このような為替のレベルデータは非定常時系列なので、本研究では3節で述べるようにレジームスイッチするモデルや時変パラメータを持つモデルを用いることを検討している。

---

<sup>1</sup>本稿ではこれら、為替取引を行う参加者を総称して為替の「トレーダー」と呼ぶこととする。

2つ目の指針は、モデルを通じた相場の転換点の検出である。為替に限らず、トレーダーは、ファンダメンタル<sup>2</sup>やテクニカルといった情報に常にアンテナを張ることで相場の転換点を探っている。もし何らかのイベントが起これば、それが転換点となって相場に変化が生じるのかを直観や経験などを含む何らかの手段で調べる。そして相場に変化が生じるとわかったのならば、レンジ相場を形成するのか、それともトレンド相場を形成するのかなどを考慮してポジションを動かしている。このように、為替のトレーダーは常に転換点とその後の展開を意識しながら相場を見張っているため、相場の転換点の統計的な検出は今回のモデル化において重要な意味を持つと考えられる。なお、相場から読み取る転換点を統計的に検出できれば、トレーダーの手法を複製できる可能性も十分にあることも見逃せない利点であると言える。

3つ目の指針は、高頻度データへのリアルタイムフィッティングの実現である。為替の取引形態は、電子取引ネットワークを中心とする相対取引が近年基本となっている。この結果、取引スピードはより高頻度となり、現在では指値板が1/1000秒(=1msec(ミリセカンド))単位で形成されるまでになっている。昨今は非定常時系列のモデル化のために大掛かりで複雑な手法が開発されているが、このような手法では瞬間的に増大していくビッグデータを、逐次的にモデルフィッティングしていくことは困難である。そこで我々はリアルタイムデータに対応できる単純なフィッティングアルゴリズムが必要不可欠であると考えた。

### 3 ベースとなるモデルの検討

#### 3.1 レジームスイッチと時変パラメータ

為替のレベルデータは非定常時系列データであり、経験的にレジームが変化することがわかっている。それゆえ、レジームを捉えるような区分的なモデル [5][6] やフィルタリングを活用した時変パラメータを持つモデル [8] などが本研究のモデル化で利用すべきモデルの候補となる。

実証分析等でよく使われる区分的なモデルとしては、マルコフスイッチング (MS) モデルが最もよく使

---

<sup>2</sup>ファンダメンタル情報は、内外経済指標、長短金利、FOMC 発言などをさす。テクニカル情報とは長短の移動平均のようなテクニカル分析がもたらす情報を指す。

われている。たとえば為替が各レジームで定数項なしの AR(1) に従うとし、そのレジームの総数が  $n$  であると仮定すると、MS モデルは、

$$x_t = a_i x_{t-1} + \varepsilon_{it}, \quad \varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_{it}}^2), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

と表すことができる。ここで  $i$  は各レジームを示すインデックスである。しかしながら、為替の場合は上昇局面ひとつとってもその度合いは様々なので、事前にレジーム数  $n$  を決めることはまず不可能である。仮にある 1 つの値に決めたとしても、観察時間の経過とともに状態の数が不足することは言うまでもない。また、状態が 1 つ増加するたびにフィッティングのための計算負荷も高まるので、リアルタイムのモデル化を見据えている本研究の目的にこのモデルは合致しない。

時変パラメータを持つ AR(1) のフィッティングでは、観測データ  $x_t$ 、時変係数であり潜在変数である  $\beta_t$  からなる次のような状態空間表現を考えてフィルタリングでパラメータ推定することが多い。

$$x_t = \beta_t x_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_t}^2)$$

$$\beta_t = \beta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_{\eta_t}^2)$$

このモデルの推定では、 $\beta_t$  を潜在変数とし  $x_t$  を観測することで  $\beta_t$  を逐次更新する。このような時変パラメータを持つモデルにおいては、先の MS モデルのように事前にレジーム数を設定する必要がないので、レジームの切り替えの取り扱いが MS モデルのそれよりもはるかに容易にはなる。

しかしながら、為替レベルデータのモデル化の目的で利用するには、このモデルにはいくつかの欠点がある。1 つの欠点は、転換点の判別である。時変パラメータの変化から相場の転換点を判別するにはある程度の時間の経過が必要となるので、逐次的なデータ更新に際してに即時に転換点を判断することはできない。また、カルマンフィルタ [2] のようなノイズに独立同分布の正規性を仮定したモデルの場合には、実際のデータに大きな変化が生じて、その変化が時変係数に正しく反映されるまでには、いくらかの遅れが

生じるという問題も内在する。

### 3.2 利用するモデル

以上の問題点を解決するために、本研究では [7] が提案したフレームワークを用いて、次のような時変自己回帰モデルを為替のレベルデータへ適用し、そのフィッティングを試みた。

$$x_t - \mu_t = \sum_{i=1}^k a_{t,i}(x_{t-i} - \mu_{t-i}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (1)$$

このモデルで推計するパラメータは、AR 係数  $a_{t,i}$ 、重み付き平均  $\mu_t$ 、重み付き共分散  $C_{t,j}$  である。また、誤差項には時変で動く分散  $\sigma_t^2$  をもつ正規分布を仮定している。推計方法について簡単に説明する。まず平均と共分散の初期値を設定するために、データを最初の  $L$  期間分を用意し、次のように求める。

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_L &= \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L x_m \\ C_{L,j} &= \sum_{m=1}^L (x_m - \hat{\mu}_L)(x_{m-j} - \hat{\mu}_L) \end{aligned}$$

そして、この初期値を用いて、 $t$  期の  $\mu_t$  と  $C_{t,j} (j = 0, 1, \dots, k)$  を次のように求める。

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_t &= r\hat{\mu}_{t-1} + (1-r)x_t \\ C_{t,j} &= rC_{t-1,j} + (1-r)(x_t - \hat{\mu}_t)(x_{t-j} - \hat{\mu}_t) \end{aligned}$$

また、自己回帰モデルの  $t$  期の係数  $a_{t,j}$  は、求めた平均  $\mu_t$  と共分散  $C_{t,j}$  を基に、Yule-Walker 方程式を使っ

て次のように決定する.

$$\sum_{i=1}^k \hat{a}_{t,j} C_{L,j-i} = C_{t,j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

これを  $t = L + 1, L + 2, \dots, N$  まで繰り返すことで時変パラメータを求める. なお, 誤差項の分散は  $\sigma_t^2$  は  $C_{t,0}$  に対応しており, 重みを決める  $r$  は外生的に与えているので注意されたい. 以上の式からもわかるようにこのモデルでは重み付きモーメントを利用しているため, 直近のデータに重きを置くことができ, 相場の変化に対するパラメータの追従性が高まっている. さらにこのモデルには転換点を示す指標として

$$Dm_t^2 = \frac{(x_t - \hat{\mu}_{t-1})^2}{\hat{\sigma}_{t-1}^2}$$

というマハラノビス距離の2乗を導入している. これは, 新しい実現値  $x_t$  に対して, 従前の  $\hat{\sigma}_{t-1}^2$  と  $\hat{\mu}_{t-1}$  を用いて算出できる. 定義から分かるように  $Dm_t^2$  は自由度1のカイ2乗統計量となっており,  $Dm_t^2$  が大きな値となれば新たに加わった  $x_t$  は1時点前のモデルの仮定の下では, めったに起きない値であるということの意味する. 言い換えれば, 為替がこれまでとは異なる動きをしたわけであり, 転換点を示すシグナルの候補であると読み取れる. 以上の説明からもわかるように, このモデルのフィッティングアルゴリズムは極めてシンプルである. そのため高速計算も可能であり, 「リアルタイムデータに対しても利用可能なモデル」という2節であげた指針にも合致する. なお, 本研究のような非定常時系列に対して時変パラメータをもつ時系列モデルをフィッティングするために, 拡張カルマンフィルタやパーティクルフィルタのような高度なベイズ統計を用いる手法なども開発されている [1][3]. 当てはまりを重視するのであれば, それらをフィッティングして比較対象にする必要もあるだろうが, これらのモデルは当てはめの時間効率が悪いので, リアルタイムという観点からいえば実用的ではない. そのため本研究ではその利用を見送っている.

## 4 為替データへの適用と指標の検出

### 4.1 使用するデータと時変 AR(1) モデルの当てはめ

本節ではデータに対して式 (1) で表現された自己回帰モデルを適用した結果を説明する。

当てはめに際して我々は、1980 年から 2013 年のドル円為替の日次データ（土日除く）を Bloomberg の端末から取得した。そして当てはめ結果の解釈を容易にするために、式 (1) の次数を  $k = 1$ ，過去データに対する重みを  $r = 0.97474$  と設定した時変 AR(1) をデータに当てはめた。なお、この係数  $r$  の値は、数か月間、ポジションを保有するトレーダーを想定し、3 か月（四半期）を基準として 90 日以内のデータの重みの合計が全体の 90% を占めるように設定している。トレーダーは売買の際、1 か月、2 か月、3 か月、6 か月など、区切りの良い期間を尺度に端末の画面をみて、売買のタイミングをはかることが多い。トレーダーの判断基準となりうる区切りの良い期間でウィンドウを設定することは、トレーダーの視点を表現する上で合理的であると考え<sup>3</sup>。

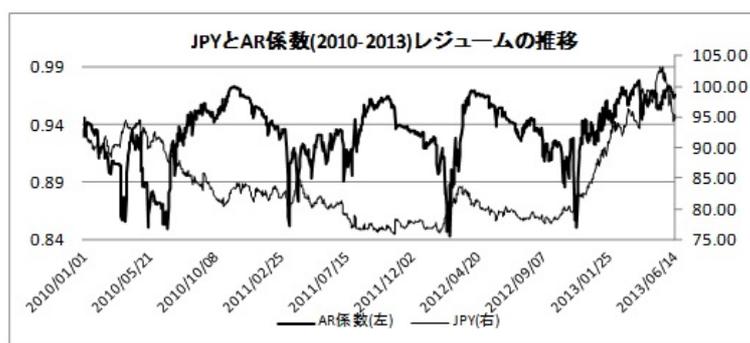


図 1: 時変 AR (1) を当てはめた結果

図 1 のグラフは、2010 年から 2013 年の近年の JPY の為替レベルと、このデータに対して時変 AR(1) にあてはめたときの時変係数  $\hat{a}_{t,1}$  を示したものである。為替のレベルデータの動きに対し、 $\hat{a}_{t,1}$  のジャンプが

<sup>3</sup>90 日以外にも、45 日、60 日、75 日、120 日、180 日といった期間を設定したのグラフも確認したところ、その形状はどれも似かよっていた。

いくつか見て取れる。特にトレンド相場やボックス圏の境目と思われる点で起きているように思われる。

## 4.2 転換点の検出

本節では、時変 AR(1) モデルの当てはめ結果から転換指標  $Dm_t^2$  と為替データとの関係を調べる。図 2 のグラフは、2010 年 1 月から 2013 年 6 月までの期間について、ドル円 (JPY) の推移と転換指標  $Dm_t^2$  の動きを見たものとなっている。

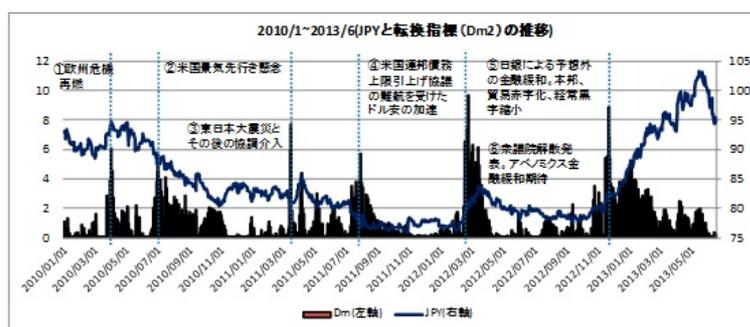


図 2: マハラノビス距離による転換点の検出

図 2 の中では相対的に大きな転換点の値が 6 回発生しており、このジャンプは上の AR 係数のジャンプの時期とほぼ重なっている。これらの 6 個の転換点の決定方法などは次節で詳しく説明するが、少なくとも図中の大きな値のいくつかは東日本震災やアベノミクスに向けた衆議院の解散など、相場上のイベント発生の日と明らかに重なっている。そして転換指標が大きくジャンプするイベントの後には、レベルデータがトレンドを持ったり、ボックス圏に入ったような動きをしたり、その水準が大きく変化したりと、相場が変化している様子が見て取れる。これらの現象は、おそらく相場の変化を察知したトレーダーがこれまでとは異なる売買を行い、その相場つきを変えたことの起因すると思われる。その意味では、時変 AR(1) モデルと転換指標  $Dm_t^2$  が、通常の売買とは異なる特殊な売買を検出したことになるだろう。

### 4.3 転換点の決定方法と各転換点の詳細

図2のグラフでは、 $Dm_t^2$ の値が5.02389を超えた場合、言い換えれば自由度1のカイ二乗分布上側2.5%点を超えた場合に、その時点を転換点とみなすことにした。ただし、この方法では継続的に転換点が発生する場合があるので、最初に5.02389を超えた時点から数えて30日間以内に発生した転換点は無視することとした。

図2のグラフに示した転換点検出時の詳細を確認する。1つ目の転換点の検出は、2010年4月1日に発生した。直前の3月24日にはフィッチのポルトガル格下げが発表になっており、この近辺を境に、欧州リスクが再認識される流れとなったことが伺える。その後、2010年3月から10月にかけて、対ユーロでドル高となる一方で、米国経済の弱さから対円でのドル安が進行した。

2つめの転換の検出は、2010年7月1日に発生した。米国景気の先行き懸念から、市場ではリスク回避の動きを受け世界的な株安が進行、東京証券取引所でも年初来の安値を記録した。ドル円の相場でも円高ドル安が進行した。この後は、2010年9月15日に日銀の介入があったものの、結局11月頃まで円高トレンドが継続した。

3つめの転換点の検出は、震災直後の2011年3月16日の円急騰の時期と合致する。先進国の協調介入が起こり一旦は円安に振れたが、また円高に戻す展開となっていった

4つめの転換の検出は、2011年7月29日に記録された。ちょうど米国の連邦債務上限引き上げ協議の難航等を受けドル安が加速していた時期に重なる。直接の因果関係は不明だが、この後、ドル円は2011年7月中旬から2012年2月中旬まで約7カ月間、75.00円から80.00円の「ボックス圏」を形成した。そして2011年10月下旬には、過去最大の円高75.95円を記録した。

5つめの転換の検出は、2012年2月17日に発生した。2012年2月14日の日銀声明で「中長期的な物価の目途は当面1%」、「長期国債の買い入れ枠を10兆円増額」など、日銀が予想外の追加金融緩和を表明した直後の時期になる。また、本邦貿易収支の赤字化と経常黒字の縮小、その後の米国の景気指標が良好な値を示したことなども背景に、2月の中旬以降は円安傾向となっていった。しかし、その後、4月に発表され

た米雇用統計が市場予想を大きく下回ったことなどを機に、再び円高基調となり、6月1日には75.32円を記録、3ヵ月半ぶりの円高・ドル安水準に戻している。

6つめの転換の検出は、2012年11月14日に生じた。これは衆議院解散発表時と合致する。以後、対円でドルは、急上昇を始め、翌日の11月15日には、ボックス圏の上限であった80円台を上を抜けた。そして、2012年11月から2013年5月の期間、相場はアベノミクスなどを通じた今後の金融緩和期待を織り込み、円安トレンドを形成した。

以上のように、大きな転換指標の値が記録された時点と、東日本震災やアベノミクスなど相場上のイベント発生の日が、ほぼ重なっていることが確認できた。

## 5 為替相場の方向性

### 5.1 相場の方向性とその検出

トレーダーが知りたいもう1つの情報は、相場の状態（方向性）である。今までの転換指標  $Dm_t^2$  では、転換点の検出は比較的うまく行えていたが、相場が、下降局面、上昇局面のどちらにいいのかまでは分らない。もし  $Dm_t^2$  に方向性を付加することができれば投資への応用可能性が見えてくる。そこで本稿では新たな転換指標として、 $t$  時点の観測値と  $t-1$  時点の移動平均  $\hat{\mu}_{t-1}$  の差の符号を付加した

$$DmS_t = \frac{(x_t - \hat{\mu}_{t-1})^2}{\hat{\sigma}_{t-1}^2} \text{Sign}(x_t - \hat{\mu}_{t-1})$$

を提案する。なぜならば、この  $DmS_t$  の符号は、アンダー、オーバーのどちらに外れているかを示している。いわば為替の方向性を示唆しているものとみなすことができると考えたからである。

## 5.2 相場方向の検出例 1

図 3 のグラフは、2010 年 1 月から 2013 年 6 月までの日次のドル円の推移と符号付き転換指標  $DmS_t$  の推移を表示したものである。 $DmS_t$  が負に偏る部分では相場は下方向に、正に偏る部分では、相場は上方向に推移していたことが分かる。大きな  $DmS_t$  の値があまり生じていない時期の相場はボックス圏で動いている。特に 2010 年 7 月以降の米国の信用不安が再び高まった時期では、円 (JPY) が対ドルで上昇 (ドル安) する中、 $DmS_t$  の値は負に偏っていたことがわかる。2012 年 11 月アベノミクスの期待が高まった時期では、円 (JPY) が対ドルで下降 (ドル高) する中で、 $DmS_t$  の値が正に偏っていたことがわかる。

以上結果から、この時期では、符号付き転換指標  $DmS_t$  の正負の符号を見て適当なポジションを取ること、収益をあげる可能性があることが示唆された。

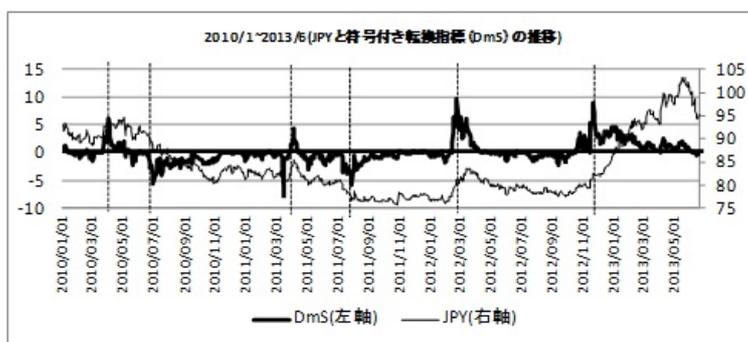


図 3: 2010 年 1 月から 2013 年 6 月までの日次のドル円の推移と転換指標

## 5.3 相場方向の検出例 2

図 4 のグラフは、プラザ合意の前後の 1983 年から 1987 年のドル円の動きと、符号付き転換指標  $DmS_t$  の動きを示している。プラザ合意の時期、符号付き転換指標  $DmS_t$  の値は、ドル円の下方向トレンドを正しくとらえていることが分かる。

興味深いのはプラザ合意の直前にも負の  $DmS_t$  が見られることである。この大きな負の値の出現時期は、日本の貿易黒字に目を付けた米国が、半導体のダンピング調査を開始するなど、対日報復策を示し始めた時期と一致している。これらの一連のニュースにより、トレーダーは、米国がそれまで続けてきたドル高容認の姿勢をやめ、ドル安方向に転換するのではないかといった憶測を持ったため、市場が円高に反応したと考えられる。つまり、トレーダーはプラザ合意以前からドルが下落する兆候を読み取っていたということであり、読み取った兆候を異常な取引として為替データの中に残していたのである。言い換えればこの例は、転換指標  $DmS_t$  の値によって、プラザ合意という大きな変化の前に生じたトレーダーの取引による相場のゆがみを取り出すことができたということに他ならない。

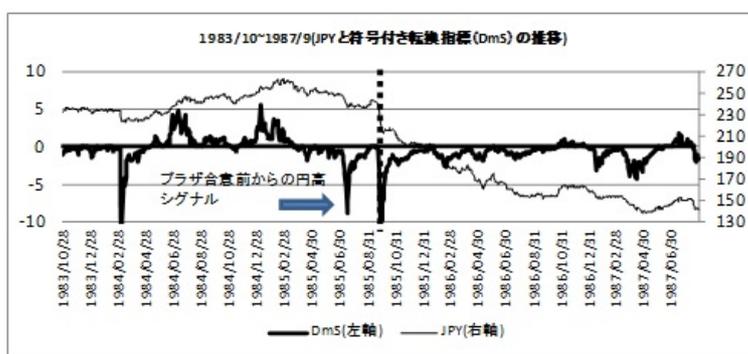


図 4: 1983 年から 1987 年までの日次のドル円の推移と転換指標

## 5.4 運用への応用

最後に、符号付き転換指標  $DmS_t$  を使って、簡単な投資のアルゴリズムを作成した。具体的には、一定のウィンドウ幅（過去 30 日間）で  $DmS_t$  の値の標本平均を計算し、この値の符号の変化をポジション変更のシグナルとした。なお、標本平均を計算した理由は、1 方向に固まる  $DmS_t$  の値からノイズを除去するためである。



図 5: ドル円の変化と運用による累積損益

表 1: 累積損益の内訳

|      |       |    |       |           |     |
|------|-------|----|-------|-----------|-----|
| 勝ち回数 | 174   | 収益 | 453.9 | 1 回あたりの収益 | 2.6 |
| 負け回数 | 302   | 損失 | 237.1 | 1 回あたりの損失 | 0.8 |
| 売買回数 | 476   | 損益 | 216.8 | レシオ       | 3.3 |
| 勝率   | 36.6% |    |       |           |     |

図 5 はこの指標を活用したアルゴリズムを通じて運用した場合の累積損益とドル円 (JPY) の推移, 表 1 はその損益の内訳を示している. 符号付き転換指標 (DmS) を元に, 常に 1 ドルを売り買いすることで運用した場合, 1980 年の開始時から 2013 年 6 月までの期間で, 1 ドル (担保相当. 実質的な元手無し) から始めて, 216.8 円の (売買回数は 476 回) 収益を上げることができている. また, 標本平均を取る日数を変えても収益は累積しており, 比較的頑健な運用成果を獲得している.

## 6 まとめと今後の課題

簡易な投資戦略がそれなりに機能することからも分かるように, 「1. 時変パラメータを持つ自己回帰モデル」と 「2. マハラノビス距離を用いた転換点候補の検出」の 2 つの手法は, 為替トレーダーの視点のモデル化に十分有効であると思われる. 今後は精緻な投資戦略の立案はもちろんのこと, 重み付き共分散における最適なウェイトの探索方法や転換点の候補の類別法の確立が必須であると考えられる.

## 参考文献

- [1] 北川源四郎 (1996) 「モンテカルロフィルタおよび平滑化について」, 統計数理, Vol.44, No.1, pp. 31-48
- [2] 北川源四郎 (2005) 「時系列解析入門」, 岩波書店.
- [3] 和合 肇 他 (2006) 『ベイズ計量経済分析』, 東洋経済新報社.
- [4] Bry, G. and C. Boschan (1971) Cyclical analysis of time series : Selected procedures and computer programs, National Bureau of Economic Research.
- [5] Hamilton, J. D. (1989). “ A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle ”, *Econometrica* 57, pp357-384.
- [6] Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [7] Yokouchi, D., Y. Aoki. and T. Kato (2013). “ An Approach Modeling on Financial Time Series Data with Regime Shifts”, Hitotsubashi ICS-FS Working Paper Series FS-2013-E-004.
- [8] Zivot, E. AND J. Wang (2005) *Modeling Financial Time Series with S-PLUS*, Springer