



HUB-FS Working Paper Series

FS-2018-J-002

バーゼル III 適格 Additional Tier1 債券（AT1 債）に 対する構造型プライシングモデルの改良と実証分析

杉山 泰平

一橋大学大学院 国際企業戦略研究科 修了生

中川 秀敏

一橋大学大学院経営管理研究科

First version: 2018 年 6 月 13 日

Current version: 2018 年 8 月 1 日

All the papers in this Discussion Paper Series are presented in the draft form. The papers are not intended to circulate to many and unspecified persons. For that reason any paper can not be reproduced or redistributed without the authors' written consent.

バーゼル III 適格 Additional Tier1 債券 (AT1 債) に対する 構造型プライシングモデルの改良と実証分析 *

杉山 泰平[†] 中川 秀敏[‡]

2018 年 8 月 1 日

概要

バーゼル III 適格 Additional Tier 1 債券 (AT1 債) は、普通社債に比して高水準のクーポンが設定されている一方、Tier1 資本を補完する「AT1 資本」として規制自己資本に算入できるという資本性を担保するために、様々な契約条件が付されている。そのため投資家は、発行体のデフォルト (債務不履行) リスクに加えて、AT1 債が有する各種契約条件を考慮した上でプライシングをおこなうことが求められる。本論文では、先行研究を拡張して二種類の強制元本削減トリガー条項 (「財務トリガー (Accounting Trigger)」および「PONV トリガー (Point Of Non-Viability Trigger)」) を考慮した AT1 債プライシングモデルを設定し、実際に発行されている AT1 債の市場価格データを用いた実証分析の概要を通じて、提案するプライシングモデルの有用性について検討することを主眼とする。

実際に発行されている日欧二つの AT1 債の契約条件および市場データから推定されたパラメータを用いて、本論文で提案する「財務トリガーおよび PONV トリガーを資産過程の初到達条件として定式化する構造型の不完全情報プライシングモデル」に基づく理論価格のシミュレーションを実施し、従来の構造型モデルと提案モデルの理論価格の差異、および市場価格と提案モデルの理論価格との乖離状況を観察した。その結果、市場価格が相対的に低い局面において、提案した AT1 債プライシングモデルによる理論価格が、他の構造型モデルの理論価格と比べて市場価格に近い水準で推移している状況がいくつか観測され、提案モデルには実務への応用可能性が十分にあると推察される。

1 はじめに

バーゼル III 規制の観点から銀行のバランスシートを俯瞰した際、調達側の基本構造を以下のように捉えることができる。

- 普通株式等 Tier1 資本 (Common Equity Tier 1 Capital, CET1 資本)
- 普通株式等を除くその他 Tier1 資本 (要件を満たす優先株や「AT1 債」など) (Additional Tier 1 Capital : AT1 資本)*¹
- Tier2 資本 (要件を満たす劣後債、劣後ローン、一般貸倒引当金など)
- 上記以外の資本 (預金、普通社債といったシニア債務など)

* 本研究は JSPS 科研費 JP17K01248 の助成を受けておこなわれた。なお本稿は、杉山の専門職学位論文をもとに改訂したものである。

[†] 一橋大学大学院 国際企業戦略研究科 修了生

[‡] 一橋大学大学院 経営管理研究科 (hnakagawa@hub.hit-u.ac.jp)

*¹ CET1 資本と AT1 資本の合計が「Tier1 資本 (Tier 1 Capital)」となる。

バーゼル III 規制においては、国際的に活動する銀行に対して、「リスクアセット額」対比での「規制自己資本 (Tier1 資本と Tier2 資本の合計) 比率」を 8% 以上、「Tier1 比率」を 6% 以上、「CET1 比率」を 4.5% 以上とにすることが必要とされる。

その意味では、CET1 資本を増やすことが最も重要ではあるが、Tier1 資本を補完するという点で「AT1 資本」を増やすことも銀行の資本政策上は重要である。

「AT1 資本」の例としては、普通株よりも配当金を優先的に受けられるかわりに議決権が付されない「優先株」が挙げられるが、近年では AT1 資本に算入可能な債券（負債と資本の両方の性格を有することからハイブリッド証券とも呼ばれる）も、規制上の自己資本（regulatory capital）を増強させる目的で世界各国の金融機関によって発行されるようになっている。

AT1 資本に算入可能な債券は「バーゼル III 適格その他 Tier1 債券 (Basel III Compliant Additional Tier 1 bond)」と呼ばれるが、一般に略して「AT1 債」と呼ばれることも多く、本論文でも以降「AT1 債」と呼ぶことにする。

AT1 債の適格要件の詳細は、Basel Committee on Banking Supervision（以降、BCBS）[1]にて定められている。BCBS [1] や De Spiegeleer et al. [7] によると、投資家にとっての「AT1 債の元本が毀損する、もしくは 期日通りの利払いがなされないリスク^{*2}」に関連する AT1 債特有の契約事項として、主に以下のようなことが挙げられる。

- 財務トリガー (Accounting Trigger) への抵触リスク：発行体の CET1 比率 (CET1 資本の額をリスクアセット額で割ったもの) が事前に定めた閾値に抵触すると、強制的に債券の元本削減あるいは株式への転換が発動される。
- PONV トリガー (Point Of Non-Viability Trigger) への抵触リスク：発行体に対して経営危機や債務超過等の懸念が生じた際、発行体を規制する監督当局の決定により、強制的に債券元本の削減あるいは株式への転換が発動される。
- 償還時期の不確実性 (Extension Risk)：AT1 債は 満期のない永久債の形をとるが、通常は初回償還可能日 (First Call Date) に元本が償還されることが想定されている。したがって、発行体の裁量により初回償還可能日に元本が償還されないことが投資家にとってはリスクとして認識される。
- 利払い消滅リスク (Coupon Cancellable Risk)：AT1 債は 発行体に対し債券の利払いに関する裁量 (利払いの停止等) を認めていることから、発行体の裁量により投資家の期中受取利息額が減少してしまうリスクがある。

AT1 債は、同一発行体の同程度の年限を有する普通社債に比して高水準のクーポンが設定されている一方、上記のように普通社債には見られない投資家のリスク要因となる様々な契約条件が付されている。そのため投資家は、発行体のデフォルト（債務不履行）リスクに加え、AT1 債が有する各種契約条件を考慮した上でのプライシングやリスク管理をおこなうことが求められる。

本論文の目的は、上述した AT1 債特有の契約事項のうち、特に「財務トリガー」と「PONV トリガー」の両方を有する AT1 債に対する新しいプライシングモデルを設定し、同時にその設定モデルに対して実際の AT1 債の市場価格データを用いて実証分析をおこない、主に信用リスクの観点からそうしたトリガーの AT1 債プライシングへの影響についての理解を深めていくことである。

^{*2} 本論文における「AT1 債の信用リスク」の定義である。

Liberadzki and Liberadzki [13] によると、AT1 債プライシングの研究方法は主に「構造型モデル (Structural Model)*³」と「マーケットインプライドモデル (Market Implied Model)」と呼ばれる二つの異なるモデルに基づくアプローチに分類される。

このうち、マーケットインプライドモデルは、De Spiegeleer and Schoutens [6] で提唱されている「クレジットデリバティブモデル (Credit Derivatives Model)」や「株式デリバティブモデル (Equity Derivatives Model)」が有名な例であり、AT1 債の市場価格の変動の特徴をつかむうえで非常に便利なモデルであると考えられている。

一方で、AT1 債に設定されているトリガー条件としては、上述したように、発行体の財務状態が債券の元本削減あるいは株式への転換の引き金（トリガー）となる「財務トリガー」や「PONV トリガー」が設定されることが一般的である。この点で、Rösler [16] が指摘しているように、証券取引市場で観測される数値基準や挙動に AT1 債のペイオフが依存していることを前提にしているマーケットインプライドモデルは、発行体の財務状態に関連するトリガー条件を設定している AT1 債とは整合的であるとは言えない側面がある。

バランスシートの状態に関連する財務トリガーや PONV トリガーの性質がもたらす AT1 債の信用リスクの特徴を素直にモデルに織り込むことを重視する観点から、本論文では、Rösler [16] 構造型モデルのアプローチを採用する。ただし、PONV トリガーは監督当局の判断に基づくものであり、厳密にはバランスシートの状態に依存して発動することが明示されているわけではないため、先行研究である Rösler [16] のプライシングモデルにおいては、PONV トリガーは考慮されていない。

そのため、本論文では「監督当局は発行体の資産価値を完全観測できる立場にあり、発行体の資産価値がデフォルト発生閾値と同水準、もしくはそれよりも高い水準にまで下落した時点で PONV トリガーを発動する」という仮定をおいて、PONV トリガーを初到達時刻モデルの枠組みで扱えるようにした AT1 債のプライシングモデルを新たに提案する。

また、Rösler [16] と同様に、「投資家には発行体の資産価値は正確に観測することはできない」という不完全情報を考慮したモデルを検討する。

以上をふまえると、本論文で取り組む課題は次の三点にまとめられる。

- (1) 財務トリガーや PONV トリガーへの抵触条件を適切に定式化することで、構造型モデルの枠組みで AT1 債のプライシングモデルを設定すること。
- (2) 投資家は発行体の資産価値に対して不完全情報しか持ちえないということをプライシングに反映させる適切なモデルを設定すること。
- (3) 本論文で提案するプライシングモデルに基づく理論価格と実際の AT1 債の市場価格を実証分析を通じて比較して、本論文で提案するプライシングモデルの有用性について検討すること。

本論文の構成は以下の通りである。

第 2 節では、理論モデルとして、構造型モデルのアプローチに立脚した AT1 債プライシングモデルの定式化をおこなう。その後、実証分析において具体的なモデル価格を算出するための分析モデルとして、プライシングモデルにインプットする各種パラメータの推定手法等について説明する。第 3 節では、実際に発行された日本と欧州二つの AT1 債を用いての実証分析をおこなう。モデル価格から得られる示唆、およびモデル価格と市場価格の比較から得られる示唆について記す。第 4 節では、全体のまとめと追加的な課題について述べる。

*³ より具体的には「初到達時刻 (first-passage time) モデル」と呼ばれるモデルを用いることになる。

2 プライシングモデルの設定

本節では、全般にわたって主に Rösler [16] にて述べられている手法を中心にまとめながら、第 2 節の実証分析にて用いる構造型モデルに基づいた AT1 債プライシングモデルの設定をおこなう。なお、一部の数式表現については、第 3 節の実証分析に即した形で調整・修正をおこなっている。

前半部分である 2.1 小節「理論モデル」では、構造型モデルを用いた債券のプライシングモデルの定式化をおこなう。2.1.1 項では構造型モデルの概要と、普通社債に対するプライシングを想定したモデル価格式を設定する。続いて 2.1.2 項および 2.1.3 項にて、構造型モデルに AT1 債の各種トリガー条件を織り込むことで、本題である AT1 債に対するプライシングを想定したモデル価格式を設定する。また、本論文の AT1 債プライシングモデルでは発行体の資産価値だけではなく CET1 比率の挙動をモデル化するため、2.1.4 項にて CET1 比率をモデル化する手法について説明する。前半部分の最後となる 2.1.5 項では、発行体と投資家が持ち得る情報として、発行体の情報について正確に把握できている状態（「完全情報」）と、一部の情報が正確に把握できない状態（「不完全情報」）をそれぞれ設定する。

後半部分である 2.2 小節「具体的な分析モデル」では、2.1 小節にて示した債券のプライシングモデルを実証分析に適用するにあたり必要となる各種モデルについて示していく。2.2.1 項ないし 2.2.2 項では、プライシングモデルにインプットする各種パラメータの推定方法について述べている。2.2.3 項では、モデル価格を算出するにあたり必要となる条件付確率を求めるための手法として、モンテカルロ・シミュレーションのアルゴリズムについて説明する。

2.1 理論モデル

2.1.1 構造型モデル

構造型モデルは、債券の信用リスクをモデル化する手法の一つである。構造型モデルは、Merton [15] における「企業が発行する割引債の満期時点において、その企業の資産価値が負債額面を下回った状態をデフォルト（債務不履行）と定めたモデル」が嚆矢とされている。

本論文では、Black and Cox [5] にその由来を求めることができる「初到達時刻 (first passage time) モデル」の枠組みでモデル化をおこなう。初到達時刻モデルは、デフォルトが満期時点でのみ起こりうると想定している Merton [15] モデルとは異なり、割引債の満期以前であっても、発行体である企業の資産価値が事前に設定された「閾値 (threshold)」以下に落ち込んだ時点でも「デフォルト（発生）時刻」と定義し、早期デフォルトの可能性を認めるモデルになっている。

これ以降では、数学的にモデルを導入していく。

まず、連続時間 $[0, \infty)$ の設定で、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in [0, \infty)}, \mathbf{Q})$ を導入し、すべての確率過程がフィルトレーション $\mathbb{G}$ -適合であるという前提をおく。ここで、 $\mathbf{Q}$ はリスク中立確率測度を表すと仮定する。

次に、発行体の資産価値を表す確率過程を $V = (V_t)_{t \in [0, \infty)}$ と表す。時刻 0 における資産価値は定数 $V_0 (> 0)$ とする。発行体は、負債の満期前であっても、時間とともにランダムに変動する資産価値が、債権者との契約で事前に定められた閾値まで低下した際に「デフォルト」に陥ると仮定する。

本論文では、デフォルトの閾値を「発行体の負債額面」と定め、定数 $K \in (0, V_0)$ で表すことにする。これより、デフォルト時刻 τ を

$$\tau := \inf\{t > 0 \mid V_t \leq K\}. \quad (1)$$

と定義する ($\inf \emptyset = \infty$ とする).

資産価値過程 (V_t) はフィルトレーション $\mathbb{G}$ に関して適合すると仮定している, すなわち資産価値過程 (V_t) の真の値をリアルタイムで観察できることを暗に想定している. したがって (V_t) が連続過程であれば, (1) 式によって定義されるデフォルト時刻 τ は, フィルトレーション $\mathbb{G}$ に関する (可予測な) 停止時刻 (stopping time) として特徴づけられる. 割引債の価格付けの問題は, $\mathbf{Q}$ の下での τ の確率分布を求める問題におおよそ帰着されることになる.

これ以降は, 初到達時刻モデルの枠組みで AT1 債のプライシングを考えていく. AT1 債は永久債として発行されるが, 現実的には初回償還可能日に償還されるものと見なされるので, 初回償還可能日を満期時点 T として考えていく.

また前節で触れたように, AT1 債のプライシングにおいては, 発行体のデフォルトだけでなく, 財務トリガーという概念をモデルに織り込むことが重要となる.

本論文では, 財務トリガーを, 発行体の CET1 比率 (CET1 資本の額をリスクアセット額で割ったもの) が一定水準以下となったときに発動されるイベントと定義し, 財務トリガーの発動によって債券元本が 100% 削減される, いわゆる “Full Write-down” 型の AT1 債であると仮定することにする.

また, Rösler [16] のモデルと同様に, 財務トリガー抵触とデフォルト発生を区別して扱うこととする. 具体的には, デフォルト状態に陥るか否かは, 発行体の資産価値を常に (連続的に) 観察して, 閾値に達するかどうかを常にチェックするのに対して, 財務トリガーが発動するか否かについては, 発行体の CET1 比率を定期的な離散時点でのみ観察して, 財務トリガーの発動条件に抵触しているか否かをチェックするという前提に基づいてモデルを構築する.

ここで, CET1 比率を表す確率過程 $\text{CET1R} = (\text{CET1R}_t)_{t \in [0, \infty)}$ を設定する. また, CET1 比率に対する財務トリガー発動の閾値を, 正の定数 K_{ACC} で表すとする.

財務トリガー抵触による AT1 債の債券元本の削減, ないしは株式への転換が発生する時刻を, 本論文では「財務トリガー抵触時刻」と呼び, θ_{ACC} と表すことにする. ただし, Rösler [16] の手法にならない, 発行体の四半期決算発表タイミングを想定した時点のみで可能と仮定する.

具体的には以下のように定式化する. 対象となる AT1 債の発行時点の直前の四半期決算発表時点から発行時点までの経過時間を $t_0 \in [0, 0.25)$ として固定して, 発行体の四半期決算発表時点の集合を $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k - t_0 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0.25 - t_0, 0.50 - t_0, 0.75 - t_0, 1 - t_0, \dots\}$ と表す. そして, 「財務トリガー抵触時刻」 θ_{ACC} を $\mathcal{T}_{\text{qtr}}$ 上での CET1 比率の財務トリガー閾値への初到達時刻として, 以下のよう

$$\theta_{\text{ACC}} := \inf\{t \in \mathcal{T}_{\text{qtr}} \mid \text{CET1R}_t \leq K_{\text{ACC}}\}. \quad (2)$$

次に, 発行体の資産価値過程 (V_t) の $\mathbf{Q}$ の下での挙動を, Merton [15] や Black and Cox [5] に倣い以下のように定式化する.

$$dV_t = (r - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dW_t. \quad (3)$$

ここで, r はリスクフリーレート, δ は発行体の資産価値の外部流出率, σ_V は資産価値のボラティリティ, $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$ は $\mathbf{Q}$ の下での標準ブラウン運動である.

Frey and Schmidt [10] では, 発行体の株価の挙動を幾何ブラウン運動で表現することは非現実的なモデルであることが知られているが, 発行体の資産価値の挙動を幾何ブラウン運動で表現することについては, Leland and Toft [12] や Duffie and Lando [8] 等, 多くの構造型モデルの先行研究にて用いられており, これまでの経験的見地 (“empirical grounds”) から, 当該仮定を用いることについては弁護

し得るものである (“defendable”), と述べられている。

なお、デフォルトリスクのある満期 T の固定利付債の $t(\leq T)$ 時点における残存期間に対する割引キャッシュフロー構造 $\Pi_{t,T}^{\text{Def}}$ を、本論文では Rösler [16] を参考とし以下のように定義する。

$$\Pi_{t,T}^{\text{Def}} := \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} \mathbf{1}_{\{\tau > t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} e^{-r(T-t)} N. \quad (4)$$

ここで、 ℓ は時点 $t = 0$ から債券の満期 T までの間の利息の総支払回数、 t_i は $t = 0$ から見て i 回目の利息支払い時点、 c_i は i 回目の支払利息額、 N は債券の元本としている。なお本論文においては、“Full Write-down”型の AT1 債を対象にすることと整合させるため、発行体のデフォルト発生後の債券元本回収率も一律 0% に設定する。

(4) 式をふまえると、デフォルトリスクのある満期 T の固定利付債の $t(\leq T)$ 時点におけるモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def}}$ は、Rösler [16] を参考にすると、リスク中立評価法によって以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} P_{t,T}^{\text{Def}} &:= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\Pi_{t,T}^{\text{Def}} | \mathcal{G}_t] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau > t_i | \mathcal{G}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau > T | \mathcal{G}_t). \end{aligned} \quad (5)$$

2.1.2 AT1 債の構造型プライシングモデル

前項で述べたように、ここでは財務トリガー抵触後の債券元本削減率を 100% とする “Full Write-down”型 AT1 債を考えており、発行体のデフォルト発生後の債券元本回収率も一律 0% に設定している。つまり、デフォルト発生または財務トリガー抵触発生のいずれかが起こった時点 $\tau \wedge \theta_{\text{ACC}}$ 以降は当該債券からのキャッシュフローは発生しないと仮定することになる（ここで $a \wedge b := \min\{a, b\}$ とする）。

これより、 t 時点から「満期」 T （永久債ではあるが、初回償還可能日を「満期」と仮定したこと）に注意）までの間の割引キャッシュフロー構造 $\Pi_{t,T}^{\text{Def,ACC}}$ は、(4) 式を、財務トリガー抵触時刻と財務トリガー抵触後の AT1 債の債券元本削減を付加する形で修正することで、Rösler [16] にならい、以下のように定義することができる。

$$\Pi_{t,T}^{\text{Def,ACC}} := \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > T\}} e^{-r(T-t)} N. \quad (6)$$

したがって、デフォルトと財務トリガーの概念を織り込んだ、初回償還可能時点 T の “Full Write-down”型 AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def,ACC}}$ 式は、(6) 式より、リスク中立評価法によって以下のように定義できる。

$$\begin{aligned} P_{t,T}^{\text{Def,ACC}} &:= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\Pi_{t,T}^{\text{Def,ACC}} | \mathcal{G}_t] \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i | \mathcal{G}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > T | \mathcal{G}_t). \end{aligned} \quad (7)$$

2.1.3 PONV トリガーを加味した AT1 債プライシングモデル

2.1.2 項にて紹介した通り、Rösler [16] の AT1 債のプライシングモデルは、構造型モデルを前提に、停止時刻としてデフォルト時刻と財務トリガー抵触時刻を導入し、AT1 債の元本および利息のペイオフ

を特徴付けたものである．しかし，Rösler [16] は，PONV トリガーの概念を自身のプライシングモデルには組み込んでいない^{*4}．

BCBS [1] において，AT1 資本を含む Tier1 資本は “going-concern capital” つまり，金融機関が破綻に陥ることなく事業が継続できるよう，金融機関が被る損失を吸収するための資本であることが示唆されている．このことから，発行体にデフォルトが生じる前に PONV トリガーが発動することで，AT1 資本が損失を吸収することが実務上期待されている．したがって，AT1 債プライシングモデル構築の際，PONV トリガーの概念を導入することについては一定の合理性があるものと考えられる．

先述の通り，PONV トリガーが発動するタイミングは監督当局の判断に委ねられている．PONV トリガーを Rösler [16] のプライシングモデルに追加するためには，PONV トリガーをどのように定義し，デフォルト発生や財務トリガー抵触とどのような関係にあるかを明確にする必要がある．

本論文では，PONV トリガーの概念を以下のような考え方のもとに追加することとする．

- PONV トリガーは，発行体のデフォルト発生，もしくは，発行体がデフォルト状態になくとも，発行体の資産価値が負債価値に「非常に近づいている」ため，発行体の事業継続が難しいと監督当局によって判断された時点で発動する．
- PONV トリガー抵触閾値は，デフォルト発生閾値と同水準，もしくはより高い水準にあることを想定する．（したがって，後述するが，このような PONV トリガー抵触を考慮する場合は，デフォルトと同時にそれ以前に PONV トリガー抵触が必ず発生するので，デフォルトを考慮する必要がなくなる．）
- 財務トリガー抵触後に PONV トリガーに抵触することはなく，また PONV トリガー抵触後に財務トリガーに抵触することもない．要するに，財務トリガーまたは PONV トリガーのどちらか先に発動した方だけを考慮すればよい．
- PONV トリガーは監督当局の判断で発動する．監督当局は発行体の内部者と同様，発行体の資産価値を完全，かつ連続的に把握できる主体（インサイダー）であるとする．

まず，正の定数 K_{PONV} を発行体の資産価値過程に対する PONV トリガー閾値とし， $V_0 > K_{\text{PONV}} \geq K$ を満たすと仮定する．そのうえで，PONV トリガー抵触時刻 θ_{PONV} を以下のように定義する．

$$\theta_{\text{PONV}} := \inf\{t > 0 \mid V_t \leq K_{\text{PONV}}\}. \quad (8)$$

$K_{\text{PONV}} \geq K$ の仮定と (V_t) の連続性より， $\theta_{\text{PONV}} \leq \tau$ が成り立つことが分かる．このことは，PONV トリガーを考慮した場合には，AT1 債のプライシングにおいてはデフォルト時刻 τ を考慮する必要がなくなることを意味する．

したがって，PONV トリガーの概念を織り込んだ AT1 債のプライシングモデルでは，財務トリガー抵触時刻 θ_{ACC} と PONV トリガー抵触時刻 θ_{PONV} の二つの停止時刻によって AT1 債の元本および利息のペイオフが特徴付けられることになる．

PONV トリガーを考慮した際の「(財務または PONV によるいずれかの早いほうの) トリガー発動時刻」を表す確率時刻を θ_{trigger} と表すと，結局

$$\theta_{\text{trigger}} := \theta_{\text{ACC}} \wedge \theta_{\text{PONV}} = \begin{cases} \theta_{\text{ACC}} & \text{if } \theta_{\text{ACC}} \leq \theta_{\text{PONV}} \\ \theta_{\text{PONV}} & \text{if } \theta_{\text{ACC}} > \theta_{\text{PONV}} \end{cases} \quad (9)$$

^{*4} PONV トリガーではなく，発行体の株価が定められた閾値以下になるときに発動される “market trigger” に言及している．

と定義される。

これより、PONV トリガーの概念を織り込んだ AT1 債のモデル価格式は、Rösler [16] を参考にする
と (8),(9) から以下のように定義できる。

$$P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > t_i \mid \mathcal{G}_t) \\ + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > T \mid \mathcal{G}_t). \quad (10)$$

2.1.4 CET1 比率と資産価値との関係式

2.1.2 項および 2.1.3 項にて、AT1 債プライシングモデルに財務トリガー抵触時刻、および PONV トリガー抵触時刻の概念を導入した。2.1.2 項および 2.1.3 項の記載からも分かる通り、本論文の AT1 債プライシングモデルは、発行体の資産価値だけではなく CET1 比率の挙動を別途モデル化する必要がある。

本論文では Rösler [16] の手法を参考とし、発行体の資産価値と、発行体の CET1 比率との間に正の相関関係があると仮定して、以下のような関係式を設定する。

$$\log(\text{CET1R}_t) = c_1 + c_2 \log \left(\frac{V_t - K}{\text{RWAs}_t} \right). \quad (11)$$

ただし、 RWAs_t は時刻 t における発行体のリスクアセット (Risk-Weighted Assets) 額であり、 $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 > 0$ は推定すべきパラメータとする。

金融機関におけるバーゼル III 規制上の自己資本比率は、自己資本をリスクアセットという数値で除した数値で定義される。リスクアセットとは、金融機関が保有する資産について、資産クラスごとに定められたリスクウェイトという掛け目を乗じて算出された値のことを指す。その意味で (11) 式は、被説明変数を CET1 比率の自然対数、説明変数を金融機関の規制上の自己資本比率に準じた値の自然対数と設定し、両者の関係を線形近似したものと捉えることができる。

さらに、Rösler [16] と同様に、 $\beta > 0$ を金融機関の資産に適用されるリスクウェイトの加重平均に類似した指標と見なし、リスクアセットが常に資産価値の定数倍で表される、すなわち

$$\text{RWAs}_t = \beta V_t$$

が成り立つと仮定する。

この仮定により、(11) 式は

$$\log(\text{CET1R}_t) = c_1 + c_2 \log \left(\frac{V_t - K}{\beta V_t} \right) \Leftrightarrow \text{CET1R}_t = e^{c_1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{K}{V_t} \right) \right\}^{c_2} \quad (12)$$

と変形することができる。

当該パラメータ値を推定できれば、関係式において所与の資産価値過程 (V_t) に対応した一対の CET1 比率過程 (CET1R_t) を導出することが可能となる。また、次のように資産価値過程 (V_t) だけで議論することが可能である。

命題 1. $e^{-c_1} \beta^{c_2} K_{\text{ACC}} < 1$ が成り立つとき、

$$\theta_{\text{ACC}} = \inf \left\{ t \in \mathcal{T}_{\text{qtr}} \mid V_t \leq \frac{K}{1 - (e^{-c_1} \beta^{c_2} K_{\text{ACC}})^{\frac{1}{c_2}}} \right\} \quad (13)$$

が成り立つ.

一方, $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC} \geq 1$ のときは $\theta_{ACC} = 0.25$ となる.

証明 1. (2) で与えられている θ_{ACC} の定義の条件 $CET1R_t \leq K_{ACC}$ を (12) を用いて V_t の条件として書き直すと, $c_2 > 0, \beta > 0$ より

$$CET1R_t \leq K_{ACC} \Leftrightarrow e^{c_1} \left\{ \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{K}{V_t} \right) \right\}^{c_2} \leq K_{ACC} \Leftrightarrow \frac{K}{V_t} \geq 1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC})^{\frac{1}{c_2}}$$

となる. ここで $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC} \geq 1$ とすると右端の不等式の右辺は 0 以下となり, この不等式は常に成り立つことになるので, $\theta_{ACC} = \inf\{0.25k \mid k \in \mathbb{N}\} = 0.25$ となる.

一方 $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC} < 1$ のときは $1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC})^{\frac{1}{c_2}} > 0$ であるので, 上記の右端の不等式をさらに

$$V_t \leq \frac{K}{1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC})^{\frac{1}{c_2}}}$$

と変形することができる. □

3.1 節で示される実証分析における c_1, c_2 の推定結果は, $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC} < 1$ を満たしていることが確認される.

また, 以降では $e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC} < 1$ を仮定して,

$$K_{ACC}^V := \frac{K}{1 - (e^{-c_1}\beta^{c_2}K_{ACC})^{\frac{1}{c_2}}} (> K) \quad (14)$$

とおくことにする.

2.1.5 完全情報と不完全情報

Duffie and Lando [8] では, 発行体の内部者 (インサイダー) と投資家の間には情報の非対称性が存在していることが主張されている. 両者の持つ情報の最も大きな違いは, 発行体の内部者が自社の資産価値を正確に把握できるのに対し, 投資家は発行体の資産価値に関する情報として会計情報を利用することができるが, 会計情報には誤差やラグ等が存在しているため, 資産価値そのものについて観測することができず「資産価値+何か」にて表現される「資産価値に関連した情報」を観測することができるに過ぎない, という点にあるとしている.

本論文では, 発行体の資産価値, および資産価値を基にして算出される CET1 比率の情報が正確に把握できている状態を「完全情報」と呼称することとする. そして, 完全情報の対となる概念として, 発行体の資産価値, および資産価値を基にして算出される CET1 比率の情報が正確に把握できていない状態を「不完全情報」と呼称することとする. 完全情報が発行体の内部者や発行体の監督当局といった主体に与えられている情報であるのに対し, 不完全情報はアウトサイダーである投資家に与えられた情報であるといえる.

2.1.1 項ないし 2.1.3 項においては, フィルター付き確率空間の設定にてすべての確率過程が $\mathbb{G}$ -適合であるとしていたことから, 暗黙のうちに完全情報の前提で議論を進めてきたことになる. (7) 式を例にとって説明すると, 完全情報の下において, ある時点 t における AT1 債の将来の利払い時点 $t_i (> t)$ における条件付生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{ACC} > t_i \mid \mathcal{G}_t)$ は, (V_t) の Markov 性および命題 1 から, 以下のよう

に表すことができる.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, t_i]} V_s > K, \inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} \text{CET1R}_s > K_{\text{ACC}} \mid \mathcal{G}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, t_i]} V_s > K, \inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} V_s > K_{\text{ACC}}^V \mid V_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, t_i]} X_s > \log \frac{K}{V_t}, \inf_{s \in [t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_t} \mid V_t\right). \tag{15}
\end{aligned}$$

ただし, $t \leq s$ に対して

$$X_s := \log \frac{V_s}{V_t} = \mu(s - t) + \sigma_V(W_s - W_t), \quad \mu := r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} \tag{16}$$

とおいている.

ここで, $t < u$ とし, また $x < 0, y < 0$ として

$$F(t, u; x, y) := \mathbf{Q}\left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, \inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y \mid X_t = 0\right) \tag{17}$$

とおくと, 条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t)$ の計算は

$$\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} F\left(t, t_i; \log \frac{K}{V_t}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_t}\right)$$

と表すことができることに注意する.

実際には, 付録 A で示すように, $F(t, u; x, y)$ がドリフト付きブラウン運動の区間最小値に関する事象の計算であることに注意すれば, ある程度は解析的に計算を進めることが可能である.

しかしながら, 3 節における実証分析においては, 必要なパラメータの値をすべて所与としてプライシングに必要な条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid V_0)$ を計算することに専念すればよいということもあり, ナイブなモンテカルロ・シミュレーションを用いることにする. 具体的には, V_0 を出発する資産価値過程 (V_t) のサンプルパスを多数生成し, その中で $\inf_{s \in [0, t_i]} V_s \leq K$ または $\inf_{s \in [0, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} \text{CET1R}_s \leq K_{\text{ACC}}$ の条件を満たしているパスの数を, 生成したサンプルパス総数で割ることとで, 近似的に $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} \leq t_i \mid V_0)$ をまず求めるという方法である.

ただし, 実際の AT1 債の市場価格を用いてモデル・パラメータのキャリブレーションをするという場合には, モンテカルロ・シミュレーションの方法では困難であり, 付録 A 節で示す結果のように $F(t, u; x, y)$ について何らかの解析的な表現を得ておく必要があると考える.

次に, 不完全情報の概念を導入する. そのためにまず, $\mathbb{G}$ の部分フィルトレーション $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, \infty)}$ を導入する.

フィルトレーション $\mathbb{H}$ が不完全情報に対応するということを「全ての時点 $t \geq 0$ において, 資産価値 V_t は $\mathcal{H}_t$ -可測でない」と仮定することで表現することにする.

ただし, デフォルト時刻 τ , 財務トリガー抵触時刻 θ_{ACC} , PONV トリガー抵触時刻 θ_{PONV} はいずれも $\mathbb{H}$ -停止時刻であると仮定する.

すなわち, フィルトレーション $\mathbb{H}$ は, 与えられている対象銀行の財務状況については (イベントが何も起こらない段階では) 不完全な情報しか持ち得ないが, デフォルトやトリガー抵触というイベントは即座に把握することができるものと解釈することができる.

フィルトレーション $\mathbb{H}$ の下における、普通社債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def,Imp}}$ 、PONV トリガーのない AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ 、PONV トリガーのある AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ はそれぞれ、(5), (7), (10) 式をもとに以下のように表される。

$$P_{t,T}^{\text{Def,Imp}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau > t_i \mid \mathcal{H}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau > T \mid \mathcal{H}_t), \quad (18)$$

$$P_{t,T}^{\text{Def,ACC,Imp}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{H}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > T \mid \mathcal{H}_t), \quad (19)$$

$$P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}} = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbf{1}_{\{t \leq t_i\}} e^{-r(t_i-t)} c_i \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > t_i \mid \mathcal{H}_t) + \mathbf{1}_{\{t \leq T\}} e^{-r(T-t)} N \mathbf{Q}(\theta_{\text{trigger}} > T \mid \mathcal{H}_t). \quad (20)$$

モデル価格式についてまとめると表 1 のようになる。

表 1 各モデルにおいて考慮している要素の一覧

モデル価格式	デフォルト	財務トリガー	PONV トリガー	情報
$P_{t,T}^{\text{Def}}$ (5)	○	×	×	完全情報
$P_{t,T}^{\text{Def,Imp}}$ (18)	○	×	×	不完全情報
$P_{t,T}^{\text{Def,ACC}}$ (7)	○	○	×	完全情報
$P_{t,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ (19)	○	○	×	不完全情報
$P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ (10)	×	○	○	完全情報
$P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ (20)	×	○	○	不完全情報

(19) 式を例にとると、不完全情報の下における、ある t 時点における AT1 債の将来の利払い時点 $t^i (> t)$ における条件付生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{H}_t)$ は、Frey and Schmidt [10] を参考にして以下のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{H}_t) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t) \mid \mathcal{H}_t] \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t\}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[F \left(t, t_i; \log \frac{K}{V_t}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_t} \right) \mid \mathcal{H}_t \right] \\ &= \int_K^\infty F \left(t, t_i; \log \frac{K}{v}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{v} \right) \mathbf{Q}(V_t \in dv \mid \mathcal{H}_t). \end{aligned} \quad (21)$$

(21) 式を評価する場合は、(17) の計算も必要であるが、資産価値過程 (V_t) が $\mathbb{H}$ -適合ではないため、 $\mathcal{H}_t$ に関する V_t の条件付分布が必要となり、結局

$$\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{H}_t) = \int_K^\infty F \left(t, t_i; \log \frac{K}{v}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{v} \right) \mathbf{Q}(V_t \in dv \mid \mathcal{H}_t)$$

という形の計算をおこなうことになる。

本論文では、発行体の資産価値の負債価値からの超過分 $V_t - K$ の $\mathcal{H}_t$ に関する条件付分布を Frey et al. [9] を参考に、以下のように対数正規分布で与える。

$$V_t - K \sim LN(\log(\tilde{v}_t - K), \sigma_{AN}^2). \quad (22)$$

ただし、 $\tilde{v}_t(> K)$ は $\mathcal{H}_t$ -可測な確率変数で、時点 t において観測される発行体の資産価値を表すものとする。 σ_{AN} は真の資産価値 V_t と観測値 $\tilde{v}_t$ の乖離の程度を測る何らかの「ノイズ」の大きさを表すパラメータと見なして、以後「会計情報ノイズ」と呼ぶことにする^{*5}。

なお、不完全情報の下では、真に資産価値 V_t について、 $V_t > K$ は満たされるが $V_t > K_{\text{PONV}}$ は必ずしも満たされず、 $V_t \leq K_{\text{PONV}}$ のときは、結果的に $\theta_{\text{PONV}} = t$ として扱われることに注意する。

同様に、 $t \in \mathcal{T}_{\text{qtr}}$ のとき $V_t \leq K_{\text{ACC}}^V$ となる可能性もあり、結果的に $\theta_{\text{PONV}} = t$ として扱われることに注意する。

2.2 具体的な分析モデル

2.2.1 パラメータ推定：資産価値のボラティリティ

McNeil et al. [14] によれば、ある時点での CDS 契約につける CDS スプレッドとは、その契約の価値がゼロに等しくなるように決定される。このように決定された CDS スプレッドを「フェア (Fair) な」CDS スプレッドという。本論文では、市場で取引されている CDS スプレッドがフェアであるという仮定から、資産価値のボラティリティを推定することを試みる。

CDS 契約によって、CDS の買い手（プロテクション・バイヤー）は CDS 契約における参照組織がデフォルト等、一定の要件（クレジットイベント）に抵触していない限り、CDS の売り手（プロテクション・セラー）に対して定期的に CDS 保証料（CDS プレミアム）を支払う。このキャッシュフローを「プレミアムレグ (premium legs)」という。一方で、参照組織がクレジットイベントに抵触した場合、CDS の売り手は CDS の買い手に対し損失を補填する。このキャッシュフローを「デフォルトレグ (default leg)」という。

参照組織の資産価値の情報が完全に観測可能である完全情報の下で、CDS の価格はデフォルトレグの現在価値とプレミアムレグの現在価値の差によって決定される。フェアな CDS スプレッドによって締結された CDS 契約の価値はゼロであることから、フェアな CDS スプレッドはデフォルトレグの現在価値とプレミアムレグの現在価値が等しくなるように決定されることになる。

フェアな CDS スプレッドを算出するにあたっては、参照組織のデフォルト確率等を考慮したデフォルトレグとプレミアムレグの現在価値を算出する必要がある。参照組織のデフォルト確率は、CDS の参照組織の資産価値が一定期間までに事前に定めた閾値を下回る確率として表現可能である。これは、先に述べた初期到達時刻モデルである。

Karatzas and Shreve [11] や Rösler [16] によると、一般に $\mu_Y \in \mathbb{R}, \sigma_Y > 0$ として、 $t \geq 0$ に対して

$$Y_t = \mu_Y t + \sigma_Y W_t \quad (23)$$

で定義される原点を出発するドリフト付きのブラウン運動 (Y_t) の閾値 $b(< 0)$ への初到達時刻

^{*5} σ_{AN} は、会計としての「総資産」の値と真の資産価値の間に生じる「会計情報ノイズ」を反映しているだけでなく、決算時点と決算公表時点とのギャップから生じる「情報遅延ノイズ」も反映しうものと考えられる。 σ_{AN} については、その解釈および適当な推定法を考える必要があるが、それについては今後の主要な研究課題としたい。

言い換えると、時点 t における資産価値 V_t の $\mathcal{H}_t$ に関する条件付確率は、 $x \geq K$ に対して、

$$\mathbf{Q}(V_t \leq x \mid \mathcal{H}_t) = \int_K^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{AN}^2(y-K)}} \exp\left(-\frac{(\log(y-K) - \log(\tilde{v}_t - K))^2}{2\sigma_{AN}^2}\right) dy$$

と仮定することになる。

$\tau_b := \inf\{t > 0 \mid Y_t \leq b\}$ の密度関数を $\varphi(t; b, \mu_Y, \sigma_Y)$ とおくと

$$\varphi(t; b, \mu_Y, \sigma_Y) = \mathbf{1}_{\{t \geq 0\}} \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3} \sigma_Y} \exp\left(-\frac{(b - \mu_Y t)^2}{2\sigma_Y^2 t}\right) \quad (24)$$

で与えられることが知られている。

リスク中立確率測度 $\mathbf{Q}$ の下で、参照組織の資産価値過程 (V_t) が幾何ブラウン運動に従っており、

$$\log(V_t) = \log(V_0) + \mu t + \sigma_V W_t, \quad \mu := r - \delta - \frac{1}{2}\sigma_V^2 \quad (25)$$

と表されることから、デフォルト時刻 τ は

$$\begin{aligned} \tau &= \inf\{t > 0 \mid V_t \leq K\} = \inf\{t > 0 \mid \log(V_t) \leq \log(K)\} \\ &= \inf\left\{t > 0 \mid \mu t + \sigma_V W_t \leq \log\left(\frac{K}{V_0}\right)\right\} \end{aligned}$$

と表すことができる。

したがって、上述した結果を用いるとデフォルト時刻 τ の $V_0 = v$ としたときの条件付き密度関数は $\varphi\left(t; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right)$ と表すことができることに注意する。

この条件付密度関数を用いて、Karatzas and Shreve [11], McNeil et al. [14], Rösler [16] を参考に、完全情報の下における、固定の CDS プレミアムを η とする CDS のプレミアムレグの現在価値 $\text{PREM}_0(\eta, v, K)$ を以下のように与えられる。なお、想定元本は 1 とする。

$$\begin{aligned} \text{PREM}_0(\eta, v, K) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \eta(t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \mathbf{1}_{\{t_i < \tau\}} \mid V_0 = v \right] \\ &= \eta \sum_{i=1}^{\ell} (t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \left\{ 1 - \int_0^{t_i} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 ℓ は時点 $t = 0$ から債券の参照組織のデフォルト時点 τ までの CDS プレミアムの支払回数、 t_i は i 回目のプレミアム支払時点を表している。

一方、デフォルトレグの現在価値 $\text{DEF}_0(v, K)$ は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \text{DEF}_0(v, K) &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[e^{-r\tau} (1 - \text{LGD}) \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \mid V_0 = v \right] \\ &= (1 - \text{LGD}) \int_0^T e^{-rs} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds. \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $\text{LGD} \in [0, 1]$ はデフォルト時の（想定元本に対する）損失率を表す定数とする。したがって $1 - \text{LGD}$ は CDS のクレジットイベント後の回収率と見なされる。

時点 $t = 0$ におけるフェアな CDS スプレッド η^* は、 $\text{PREM}_0(\eta, v, K) = \text{DEF}_0(v, K)$ となるような CDS スプレッドであり、(26), (27) 式から以下のように表すことができる。

$$\eta^* = \frac{(1 - \text{LGD}) \int_0^T e^{-rs} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds}{\sum_{i=1}^{\ell} (t_i - t_{i-1}) e^{-rt_i} \left\{ 1 - \int_0^{t_i} \varphi\left(s; \log\left(\frac{K}{v}\right), \mu, \sigma_V\right) ds \right\}}. \quad (28)$$

このようにして、フェアな CDS スプレッド、及び初期到達時刻モデルから導出した条件付密度関数の前提から、市場で観測した CDS スプレッドを (28) 式の η^* に代入することで、資産価値のボラティリティ σ_V を逆算して求めることが可能となる。

本論文では (28) 式について、 $v = V^{\text{book}}, K = K^{\text{book}}$ として、資産価値のボラティリティ σ_V の推定をおこなう。ただし、 $V^{\text{book}}, K^{\text{book}}$ はそれぞれ、CDS 発行時に直近の発行体の財務諸表から得られる会計上の総資産簿価と総負債簿価とする。

2.2.2 パラメータ推定：CET1 比率と資産価値の関係式

(11) 式にて、CET1 比率と資産価値の関係式を定義した。関係式のうち、推定が必要なパラメータは c_1, c_2 である。

パラメータ推定にあたり、本論文では最小二乗法を採用している。パラメータ推定のため、(11) 式を線形回帰式とみなして以下の様に別途定義することとする。

$$\log(\text{CET1R}_t^{\text{book}}) = c_1 + c_2 \log\left(\frac{V_t^{\text{book}} - K_t^{\text{book}}}{\text{RWAs}_t^{\text{book}}}\right) + \kappa_t. \quad (29)$$

ここで、 $V_t^{\text{book}}, K_t^{\text{book}}, \text{CET1R}_t^{\text{book}}, \text{RWAs}_t^{\text{book}}$ は、それぞれ t 時点における観測可能な簿価ベースの発行体の総資産、総負債、CET1 比率、リスクアセット額とする。また、誤差項 κ_t は正規分布 $N(0, \sigma_\kappa^2)$ に従うとする。

なお Rösler [16] では、II から III の移行に際して規制のフレームワークが変化したことから、CET1 比率の定義が劇的に変化し、2013 年の第 4 四半期より前に計算された CET1 比率は、それ以後に計算された CET1 比率と比較することができないため、2013 年第 4 四半期からのバランスシートの数値のみを考慮して当該関係式のパラメータ推定をおこなっている、との記載がある。

当該記載は、バーゼル III 基準における自己資本の開示要件を定めた BCBS [2] における、「各国の当局は、2013 年 6 月 30 日までに本書に記載された開示要件を適用する。銀行は、2013 年 6 月 30 日以降、貸借対照表に関する最初の財務諸表の公表日から開示要件を遵守することを要求される^{*6}」との記載と整合的であると考えられる。

本論文においては Rösler [16] の手法に倣い、2013 年第 4 四半期（3 月決算であれば 2014 年 3 月期第 3 四半期）より前の財務データについては、CET1 比率と資産価値の関係式のパラメータ推定に際して使用しないこととしている。

2.2.3 条件付確率の算出：モンテカルロ・シミュレーションのアルゴリズム

債券のプライシング式から実際にモデル価格を算出するためには、債券の条件付生存確率を算出する必要がある。債券の条件付生存確率を求める方法としては、大きく分けて (1) 解析的に求める方法 (2) 数値的に求める方法の二つを挙げることができる。本論文では、(2) の代表的な手法であるモンテカルロ・シミュレーションを用いて債券の条件付生存確率を算出することとする。

モンテカルロ・シミュレーションのアルゴリズムは、Frey et al. [9] を参考にしている。(7) 式の完全情報の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC}}$ または (19) 式の不完全情報の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ を例にとる。以下 (1) から (6) のような手順でシミュレーションを実施し、債券の条件付生存確率を算出する。ただし、価格を計算する時点を常に 0 と設定し、 T を満期（正確には「初回償還可能日」）までの残存期間と見なすことに注意する。

^{*6} BCBS [2] 内にて、“National authorities will give effect to the disclosure requirements set out in this document by no later than 30 June 2013. Banks will be required to comply with the disclosure requirements from the date of publication of their first set of financial statements relating to a balance sheet date on or after 30 June 2013 (with the exception of the Post 1 January 2018 template set out in Section 1).”との記載がある。

なお、発行体の四半期決算時点の離散時刻集合に関しては $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25, 0.5, 0.75, 1, \dots\}$ ($\mathcal{T}_{\text{qtr}}$ の定義式で $t_0 = 0$ とおく) としてシミュレーションをおこなう*7。

- (1) 適当な時間刻み幅 $\Delta > 0$ を与えて*8残存期間に対して $T = J\Delta$ として、(3) 式を離散化して、資産価値過程 (V_t) の $M(\in \mathbb{M})$ 本のサンプルパス $(V_{j\Delta}^{(i)})_{i=1, \dots, M; j=0, \dots, J}$ を発生させる。その際の初期値 $V_0^{(i)}$ は以下のように定める。
 - 完全情報 $\mathcal{G}_0$ の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC}}$ に対しては、観測された $\tilde{v}_0$ を真の値と見なし $V_0^{(i)} = \tilde{v}_0$ と設定する。
 - 不完全情報 $\mathcal{H}_0$ の下でのモデル価格 $P_{0,T}^{\text{Def,ACC,Imp}}$ に対しては、(22) 式の仮定に沿って、その時点で観測された資産価値 $\tilde{v}_0$ をパラメータに含む対数正規分布 $LN(\log(\tilde{v}_0 - K), \sigma_{AN}^2)$ に従うランダムサンプル $V_0^{(i)} - K$ を生成して、初期値 $V_0^{(i)}$ を設定する。
- (2) 資産価値過程のサンプルパス $(V_{j\Delta}^{(i)})$ に対応したデフォルト時刻 $\tau^{(i)}$ を考え、デフォルト指示過程 $(\mathbf{1}_{\{\tau^{(i)} \leq j\Delta\}})$ のパスを生成する。
- (3) (12) 式に基づいて、資産価値過程のサンプルパス $(V_{j\Delta}^{(i)})$ に対応した CET1 比率過程 $(\text{CET1R}_{j\Delta}^{(i)})$ のパスを導出する。その際に、CET1 比率に関する仮定 (12) 式により、(1) で得た $V_0^{(i)}$ と (29) で得られた推定値 $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ を用いて初期値 $\text{CET1R}_0^{(i)}$ を決める。
- (4) CET1 比率過程のサンプルパス $(\text{CET1R}_{j\Delta}^{(i)})$ に対応した財務トリガー抵触時刻 $\theta_{\text{ACC}}^{(i)}$ を考え、財務トリガー抵触指示過程 $(\mathbf{1}_{\{\theta_{\text{ACC}}^{(i)} \leq j\Delta\}})$ のパスを生成する。
- (5) $(\mathbf{1}_{\{\tau^{(i)} \leq j\Delta\}})$ と $(\mathbf{1}_{\{\theta_{\text{ACC}}^{(i)} \leq j\Delta\}})$ を合わせて、サンプルパスごとの債券消滅過程 $(\mathbf{1}_{\{\tau^{(i)} \wedge \theta_{\text{ACC}}^{(i)} \leq j\Delta\}})$ を生成する。
- (6) 任意の $j = 0, 1, \dots, J$ に対して、完全情報の場合は (17) 式に相当する $F\left(0, j\Delta; \log \frac{K}{\tilde{v}_0}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{\tilde{v}_0}\right)$ 、不完全情報の場合は (21) 式に相当する $\mathbf{E}^Q \left[F\left(0, j\Delta; \log \frac{K}{V_0}, \frac{K_{\text{ACC}}^V}{V_0}\right) \mid \tilde{v}_0 \right]$ を $1 - \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{1}_{\{\tau^{(i)} \wedge \theta_{\text{ACC}}^{(i)} \leq j\Delta\}}$ で近似する。

3 実証分析

1 節で述べたように、本論文のモチベーションは「財務トリガーや PONV トリガーへの抵触条件を適切に定式化」し、「発行体の資産価値に対する不完全情報」の存在を前提とした、AT1 債の新たなプライシングモデルを提案し、「プライシングモデルに基づく理論価格と実際の AT1 債の市場価格を実証分析を通じて比較して、本論文で提案するプライシングモデルの有用性について検討する」ことである。

本節では、2 節にて設定した AT1 債プライシングモデルを用いて、日本と欧州で実際に発行された二つの AT1 債のモデル価格を算出し、その特徴について考察を加えていくことを目的としている。

本節ではまず、実証分析の概要と、実証分析におけるプライシングモデルの設定条件について説明する。その後、実際にモデル価格を算出し、得られた結果を通して上記の課題に対する一定の結果を示していくこととする。

*7 このように扱う理由としては、年 4 回ある連結 CET1 比率の条件抵触の判断タイミングが実際は明確でないため、その判断時点を厳密に扱おうとするとかえって恣意性が含まれることになるので、それよりはシンプルに Rösler [16] が与えた価格式と整合させて計算する方がよいと考えたからである。

*8 四半期決算発表タイミングを想定した離散時刻集合 $\mathcal{T}_{\text{qtr}}$ の任意の時点 s に対して、 $(j-1)\Delta < s \leq j\Delta$ ならば s を $j\Delta$ に対応させる。

3.1 実証分析の概要

3.1.1 分析対象銘柄とその概要

本論文では、日本と欧州二つの AT1 債を採り上げた実証分析をおこなう。ここでは、AT1 債に関連した事項を中心に、発行体と AT1 債の概要について簡潔に触れておくことにする。

三菱 UFJ フィナンシャルグループ (日本)

バーゼル III の段階的施行に伴い、国際的に活動する銀行を中核企業とした邦銀フィナンシャルグループにおいても、規制上の自己資本の充実を目的として AT1 債の発行を積極的に進めている。

実証分析の対象として採り上げるのは、三菱 UFJ フィナンシャルグループ（以降、MUFG）が 2015 年 3 月に発行した AT1 債である。当該 AT1 債は、MUFG にとって初の AT1 債の発行となった。

バンコ・ポプラーレ・エスパニョール (スペイン)

バンコ・ポプラーレ・エスパニョール（以降、バンコ・ポプラーレ）は、スペインに本社を置く中堅銀行である。2000 年代後半に発生した世界的な金融危機以降、不動産融資の大規模な焦げ付きに伴い多額の引当金を計上してきたこと^{*9}等からかねてより経営不安が囁かれていたが、ついに 2017 年 6 月 6 日、ECB（the European Central Bank, ヨーロッパ中央銀行）から「破綻、または破綻の恐れがある（“failing or likely to fail”）」との決定通知が SRB（the Single Resolution Board, 単一破綻処理委員会）になされた。SRB は当該通知を受け、その翌日である 2017 年 6 月 7 日にバンコ・ポプラーレに対する破綻処理を実施することとなった。

SRB が 2017 年 6 月 7 日に公表した “Notice summarising the effects of the resolution action taken in respect of Banco Popular Español pursuant to Article 29(5) SRMR” によると、バンコ・ポプラーレに対する破綻処理の概要は次の三点である：(1) バンコ・ポプラーレのバンコ・サンタンデルへの譲渡 (2) バンコ・ポプラーレの実質的な債務超過に対応するため、バンコ・ポプラーレの CET1 資本に対応する普通株式、および AT1 資本に対応する AT1 証券を全額元本削減（“written down”）(3) Tier2 資本に対応する Tier2 証券を株式に転換し、バンコ・サンタンデルに 1 ユーロの価格で譲渡。

上記 (1) ないし (3) の内容を鑑みるに、金融機関の破綻処理に際して、最初に内部利害関係者である株主・債権者が損失を被る「ベイルイン」によって破綻処理がなされたこと、さらに AT1 債（および B3T2 債）が破綻に伴う損失を吸収する役割を果たしたことがうかがえる。また、債権者の中でもシニア債務である普通社債や預金に関してはベイルインの対象とならなかったことについても注目すべきところだろう。ロイターの 2017 年 6 月 7 日記事では、バンコ・サンタンデルがバンコ・ポプラーレ買収に際し約 70 億ユーロの増資をおこなうと発表したことを報じている。

バンコ・ポプラーレが発行していた AT1 債は、ブルームバーグ上で確認できる限り 2013 年 10 月発行と 2015 年 2 月発行の計 2 本が存在しており、固定金利期間中のクーポンはそれぞれ年率 11.5%、8.25% とかなりの高水準であったことがうかがえる。実証分析では、2015 年 2 月発行の AT1 債を実証研究の対象として採り上げる。

なお、バンコ・ポプラーレの財務データについてはバンコ・ポプラーレの HP に掲載されている四半期決算報告（Quarterly Reports）から採取する。しかしながら、後述する決算の下方修正の他にも、当初発表された決算数値とその後の四半期決算報告にて再掲される決算数値に齟齬がみられる等、以前か

^{*9} ロイターの 2012 年 5 月 14 日記事など、バンコ・ポプラーレの経営不振を報じた記事は相応に存在する。

ら投資家に提示している会計情報の正確性について問題があったものとみられる。そこで各種パラメータの推定に際し、財務データは「最も直近の四半期決算報告にて報告されている数値」を採用する。

また、当該事象を鑑み、バンコ・ポプラールについて不完全情報の下でプライシングを実施する際には、(22) 式で述べたように資産価値 V_0 の条件付分布として対数正規分布を仮定する。そのパラメータである会計情報ノイズ σ_{AN} については、MUFG よりも高い値を設定する。以降、本論文内では、実証分析にて用いる MUFG の AT1 債の銘柄を「MUFG_AT1 債」、バンコ・ポプラールの AT1 債の銘柄を「POP_AT1 債」と呼称することとする。それぞれの AT1 債の契約条件の概要は、表 2 の通りである。

実証分析に用いる AT1 債の概要

表 2 実証分析に用いる「MUFG_AT1 債」およびバンコ・ポプラールの AT1 債「POP_AT1 債」の概要

契約条件の概要	MUFG_AT1 債	POP_AT1 債
ISIN	JP390290AFF7	XS1189104356
発行総額	1,000 億円	7 億 5 千万ユーロ
発行日	2015 年 3 月 23 日	2015 年 2 月 12 日
満期	なし 初回償還可能日:2020 年 7 月 15 日	なし 初回償還可能日:2020 年 4 月 10 日
利息支払い頻度	年 2 回	年 4 回
利率	初回償還可能日まで 年 2.70% (固定金利) 初回償還可能日以降は、 6 カ月ユーロ円 LIBOR + 2.40%	初回償還可能日まで 年 8.25% (固定金利) 初回償還可能日以降は、 5 年ユーロスワップ金利 + 8.179%
財務トリガー	あり 財務トリガーの閾値： CET1 比率 5.125%	あり 財務トリガーの閾値： CET1 比率 7.000%
PONV トリガー	あり	あり
利息支払い停止オプション	あり	あり

実証分析の対象期間

MUFG_AT1 債については、2015 年 12 月 9 日から 2017 年 9 月 29 日までの期間を分析期間として設定した。当該期間を分析期間として設定した理由は、ブルームバーグにて MUFG_AT1 債の市場価格が 2015 年 12 月 9 日から入手可能だったことによる。

POP_AT1 債については、2016 年 6 月 1 日から 2017 年 6 月 6 日までの期間を分析期間として設定した。当該期間を分析期間として設定した理由は、2017 年 6 月 6 日に ECB によってバンコ・ポプラールの事実上の破綻決定がなされるまでの約 1 年間の AT1 債の挙動について分析をおこなうためである。

なお、いずれの債券の分析においても、プライシングモデルにインプットするデータに欠損があった営業日については、モデル価格の算出をおこなっていない。

3.1.2 モンテカルロ・シミュレーションの概要

モデル価格を算出する際に必要となる債券の条件付生存確率を算出するにあたって、本論文の実証分析ではモンテカルロ・シミュレーションの手法を用いている。モンテカルロ・シミュレーションは、

2.2.3 項にて記載した手順に沿って実行している。今回は、資産価値過程 (V_t) のサンプルパスおよび対応する CET1 比率過程 (CET1R_t) をともに 25,000 本発生させて債券の条件付生存確率を算出している。ソフトウェアは R を使用した。

3.1.3 パラメータの設定

本論文の AT1 債プライシングモデルから価格を算出するにあたり必要なパラメータとその概要は以下の通りである。なお、価格を計算する時点は常に 0 と設定していたことに注意する。

データの出所は、各発行体の IR 資料やブルームバーグである。

市場データ・財務データから決めるパラメータ

- リスクフリーレート (r)：MUFG_AT1 債に対しては「円建て 5 年 OIS レート」を、POP_AT1 債に対しては「ユーロ建て 5 年 OIS レート」をそれぞれ使用。日次で更新
- CDS スプレッド (η)：MUFG_AT1 債に対しては「発行体のグループ内商業銀行である三菱東京 UFJ 銀行（現：三菱 UFJ 銀行）の 5 年シニア CDS スプレッド^{*10}」を、POP_AT1 債に対しては「発行体の 5 年シニア CDS スプレッド」をそれぞれ使用。日次で更新
- 資産価値の外部流出率 (δ)：「一株あたり配当額^{*11} × 発行済株式総数 / 発行体の直近の連結財務諸表の総資産簿価^{*12} (V^{book})」。いずれかの値が更新されるたびに更新
- 資産価値の初期値の観測値 ($\tilde{v}_0$)：「発行体の直近の連結財務諸表の総資産簿価 (V^{book})」。四半期ごと更新
- 負債価値 (K)：「発行体の直近の連結財務諸表の総負債簿価 (K^{book})」。四半期ごと更新
- CET1 比率 (CET1R_0)：「発行体公表の直近のバーゼル III 関連資料に記載の連結 CET1 比率 ($\text{CET1R}^{\text{book}}$)」。四半期ごと更新
- リスクウェイト (β)：「発行体公表の直近のバーゼル III 関連資料に記載のリスクアセット額 ($\text{RWA}^{\text{book}}/V^{\text{book}}$)」。四半期ごと更新
- 財務トリガー閾値 (K_{ACC})：MUFG_AT1 債に対しては「CET1 比率 5.125%」を、POP_AT1 債に対しては「CET 比率 7.000%」をそれぞれ使用

キャリブレーションで求めるパラメータ

- 資産価値のボラティリティ (σ_V)：2.2.1 項で示した CDS スプレッドの理論式 (28) において、 $v = V^{\text{book}}$, $K = K^{\text{book}}$ として、発行時点で観測される CDS スプレッドを代入してインプライドに推定。日次で更新
- CET1 比率と資産価値の関係式のパラメータ (c_1, c_2)：2.2.2 項で述べたように、それぞれの発行体について線形回帰式 (29) を最小二乗法で推定。
ただし、分析時点におけるサンプル数が少なかったため、今回は MUFG については 2017 年 6 月末（2017 年度第 1 四半期）、バンコ・ポプラールについては 2017 年 3 月末（2017 年第 1 四半期）までのすべての有効な財務データ（発行体の総資産簿価・総負債簿価、CET1 比率、リスクアセット額）を使用して推定した。そのため、3.2 節における「財務トリガー」を含むモデル価格

^{*10} 当該 CDS スプレッドは USD 建のため、日本営業日の前営業日のデータを対応させている。

^{*11} バンコ・ポプラールは 2016 年以降無配当であったため、2015 年度の DPS=0.04 ユーロを用いた。

^{*12} 四半期の財務データ更新基準として、三菱 UFJ フィナンシャルグループは HP の IR カレンダーから把握できる四半期連結財務諸表の発表日、バンコ・ポプラールは四半期決算月の翌々月初をデータ更新日とした。

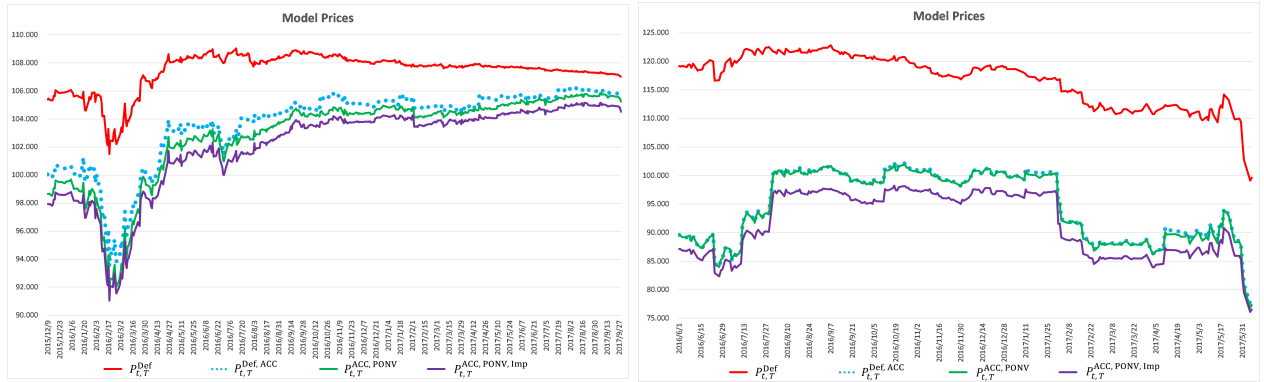


図1 対応するモデル価格の日次推移（左：MUFG_AT1 債、右：POP_AT1 債）：完全情報・普通社債モデル $P_{t,T}^{Def}$ （最も上方の赤実線），完全情報・AT1 債モデル（デフォルト・財務トリガー） $P_{t,T}^{Def,ACC}$ （上から2番目の青点線），完全情報・AT1 債モデル（財務トリガー・PONV トリガー） $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ （上から3番目の緑実線），不完全情報・AT1 債モデル（財務トリガー・PONV トリガー） $P_{t,T}^{ACC,PONV,Imp}$ （最も下方の紫実線）。ただし，POP_AT1 債については $P_{t,T}^{Def,ACC}$ と $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ がほとんど重なっている。

は， c_1, c_2 に関して，各評価日より将来の情報を用いて得た推定値を利用して算出したものであることをお断りしておく。

推定結果は次の通り。

- MUFG_AT1 債： $c_1 = -1.13$ (t 値 -2.16)， $c_2 = 0.55$ (t 値 1.99)。Adjusted R^2 は 0.175
- POP_AT1 債： $c_1 = -0.70$ (t 値 -1.44)， $c_2 = 0.78$ (t 値 2.92)。Adjusted R^2 は 0.366

モデル設定者が任意に定めるパラメータ

- 資産価値過程および CET1 比率過程を離散化する際の時間刻み幅 (Δ)：MUFG_AT1 債に対しては $\frac{1}{244}$ を，POP_AT1 債に対しては $\frac{1}{252}$ をそれぞれ使用
- CDS のクレジットイベント後回収率 ($1 - LGD$)：50% (Rösler [16] と同様)
- PONV トリガー閾値 (K_{PONV})：4.5% (パーゼル III 基準における CET1 比率の最低要求水準である「4.5%」を下回っていないか否かを，発行体の監督当局が常に観察していると仮定)
- 会計情報ノイズ (σ_{AN})：MUFG_AT1 債に対しては「10%」を，POP_AT1 債に対しては「25% または 50%」をそれぞれ使用

3.2 実証分析の結果

3.2.1 モデル価格から得られる示唆

図1は，2.1.5 項でまとめたモデル価格のうち，四つに対してモデル価格を算出して表示したグラフである。完全情報の下で算出されたモデル価格間の比較では， $P_{t,T}^{Def}$ と $P_{t,T}^{Def,ACC}$ のモデル価格の差は普通社債のプライシングモデルに対し追加的に財務トリガー抵触時刻を導入した場合の効果であり， $P_{t,T}^{Def,ACC}$ と $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ のモデル価格の差は，本論文で新たに設定した PONV トリガー抵触時刻を追加的に導入した場合の効果であると捉えることができる。

普通社債のモデル価格 $P_{t,T}^{Def}$ と AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{Def,ACC}$ ， $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ の差異は大きく，AT1 債の有する強制元本削減トリガー条項が AT1 債の条件付消滅確率を高め，AT1 債のモデル価格を

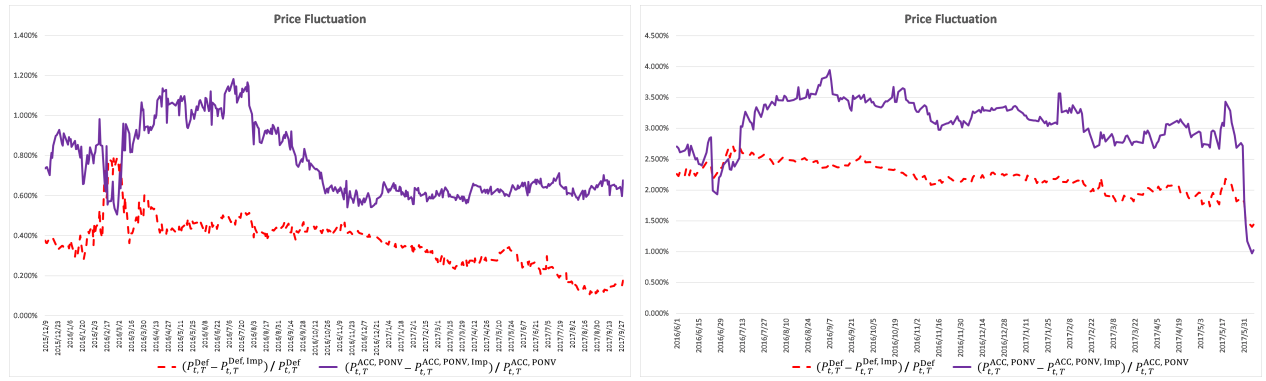


図2 完全情報と不完全情報のモデル価格の差異率の日次推移 (左: MUFG_AT1 債, 右: POP_AT1 債): 普通社債モデルに関しては $(P_{t,T}^{\text{Def}} - P_{t,T}^{\text{Def,Imp}})/P_{t,T}^{\text{Def}}$ (赤破線), AT1 債モデルに関しては $(P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}} - P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}})/P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ (紫実線)。

大きく引き下げる効果をもたらしていることがわかる。また、モデル価格の水準に加え、モデル価格の変動具合や推移の様態についても差異があることが示唆される結果が得られた。

また、 $P_{t,T}^{\text{Def,ACC}}$ と $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ のモデル価格の差を通して、MUFG_AT1 債と POP_AT1 債の PONV トリガー抵触時刻の導入による効果を比較すると、MUFG_AT1 債は PONV トリガー抵触時刻の導入によりモデル価格がさらに下落しているのに対し、POP_AT1 債については PONV トリガー抵触時刻の導入の効果がほとんど見られなかったことが確認できる。これは、本論文における PONV トリガー閾値 K_{PONV} を MUFG_AT1 債、POP_AT1 債ともに CET1 比率 4.500% に設定しているところ、財務トリガー閾値 K_{ACC} は MUFG_AT1 債が 5.125%, POP_AT1 債が 7.000% と、POP_AT1 債の方が財務トリガー閾値と PONV トリガー閾値との乖離が大きく、AT1 債の条件付消滅確率の算出において、離散時間で設定された財務トリガーの影響がより強く反映されたことによるものと考えられる。

不完全情報の下で算出した AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ は、 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ と停止時刻の設定は同じであるが、発行体の資産価値過程および CET1 比率過程が完全に把握できない不完全情報下でのプライシングによって得られたモデル価格である。したがって、 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV,Imp}}$ は、 $P_{t,T}^{\text{ACC,PONV}}$ の差は、発行体に関する情報が正確に把握できるか否かという前提の差異によって生じるものであると解釈できる。

不完全情報下での発行体の資産価値 V_0 が対数正規分布に従うというモデルにおける会計情報ノイズ σ_{AN} として、MUFG については 10%, バンコ・ポプラーについては 25% で設定してモデル価格を算出している。

本論文にて設定した投資家が想定する不完全情報下での発行体の資産価値 V_0 の条件付分布に対しては、不完全情報の下で算出されたモデル価格が、完全情報下でのモデル価格の水準をさらに押し下げるという結果が得られた。

不完全情報の設定がモデル価格にもたらす影響については、同じ停止時刻の設定によって算出されるモデル価格が、前提とするフィルトレーションの違いによってどの程度変動するのかについてみていく方がより直感的な理解を得られる可能性がある。

図 2 は、完全情報と不完全情報のモデル価格の差異率を営業日ごとに算出したものである。会計情報ノイズ σ_{AN} は図 1 と同じく、MUFG については 10%, バンコ・ポプラーについては 25% で設定してモデル価格を算出している。

不完全情報下で算出されたモデル価格が、完全情報下で算出されたモデル価格からどの程度変動（下

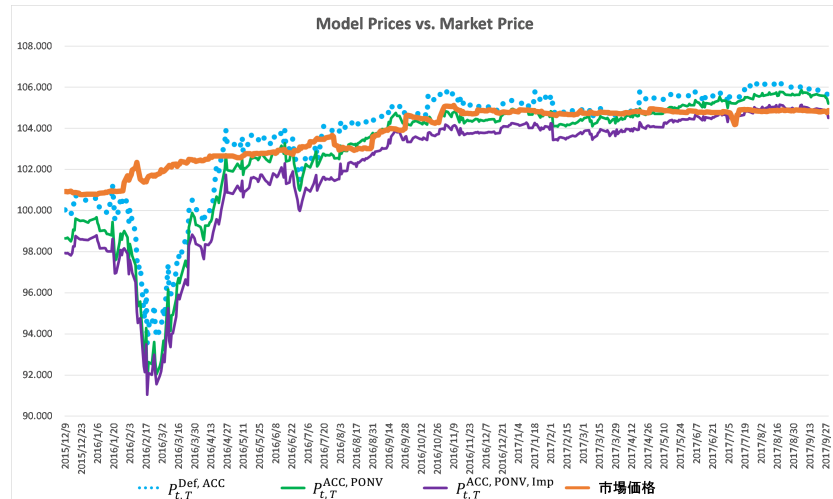


図3 対応するモデル価格と市場価格の日次推移（MUFG_AT1 債）：完全情報・AT1 債モデル（デフォルト・財務トリガー） $P_{t,T}^{Def,ACC}$ （上方の青点線），完全情報・AT1 債モデル（財務トリガー・PONV トリガー） $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ （中央の緑実線），不完全情報・AT1 債モデル（財務トリガー・PONV トリガー） $P_{t,T}^{ACC,PONV,Imp}$ （下方の紫実線）．AT1 債の市場価格は太い橙色実線で表示．不完全情報の会計情報ノイズは $\sigma_{AN} = 10\%$ ．

落）するのかを普通社債のモデル価格と AT1 債のモデル価格とで比較したところ，リスクフリーレート対比で CDS スプレッドが高水準であった期間を除いて，概して AT1 債の価格変動率の方が普通社債の価格変動率よりも高くなるという結果を得た．

当該結果は，発行体について不完全な情報しか得られない状況で算出されるモデル価格が，特に AT1 債において，完全情報の下で算出されるモデル価格から著しくかけ離れた値になってしまうリスクがあることを示唆していると考えられる．

3.2.2 モデル価格から得られる示唆

図 3 は，MUFG_AT1 債のモデル価格と市場価格を比較しているグラフである．

MUFG_AT1 債のモデル価格である $P_{t,T}^{Def,ACC}$ ， $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ ， $P_{t,T}^{ACC,PONV,Imp}$ と市場価格の推移を比較すると，2016 年 2 月～3 月頃にモデル価格と市場価格との間に大きな乖離が生じていることが分かる．当該要因は，モデルのパラメータとして用いていた三菱東京 UFJ 銀行（現：三菱 UFJ 銀行）の CDS スプレッドが急上昇したことに伴い，モデル価格が著しく押し下げられたことによるものである．ロイターの 2016 年 2 月 15 日付記事では，「前週には一部欧州銀の経営への不安が高まる^{*13}なか，思惑先行的にマイナス金利による邦銀の収益圧迫という懸念が高まってしまった」と報じており，当該事象が一時的に CDS スプレッドを上昇させる一因となっていたことがうかがえる．

しかし，それ以外の期間については，モデル価格が市場価格の推移に対してある程度整合的に算出されていることが分かる．当該結果は，あくまでも分析期間内においての話であるが，市場価格の挙動のかなり多くの部分を，本論文のプライシングモデルにて織り込んだ AT1 債の信用リスクで説明できる可能性があることを示唆していると考えられる．

一方で図 4 は，POP_AT1 債のモデル価格と市場価格の推移を比較しているグラフである．ただし，会計情報ノイズは図 1, 2 のときと異なり， $\sigma_{AN} = 50\%$ と設定した．

モデル価格と市場価格がある程度整合的に推移している状況がいくつか観測された一方で，モデル価

^{*13} ドイツ銀行の AT1 債利払い懸念に関しては，別途ロイターの 2016 年 2 月 12 日付記事にて詳述されている．

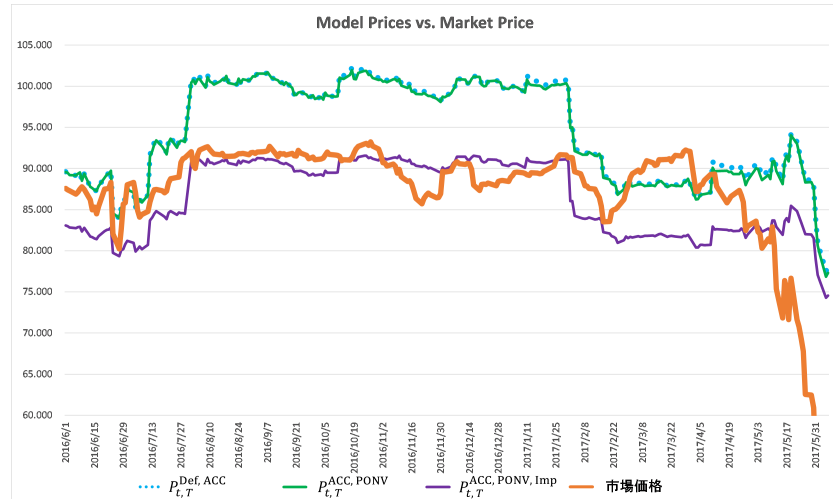


図4 対応するモデル価格と市場価格の日次推移 (POP_AT1 債) : 完全情報・AT1 債モデル (デフォルト・財務トリガー) $P_{t,T}^{Def,ACC}$ (上方の青点線), 完全情報・AT1 債モデル (財務トリガー・PONV トリガー) $P_{t,T}^{ACC,PONV}$ (上方の緑実線), 不完全情報・AT1 債モデル (財務トリガー・PONV トリガー) $P_{t,T}^{ACC,PONV,Imp}$ (下方の紫実線). AT1 債の市場価格は太い橙色実線で表示. 不完全情報の会計情報ノイズは $\sigma_{AN} = 50\%$.

格と市場価格の水準や推移の様態に大きな乖離が生じた要因としては、主に以下のような仮説を挙げることができると考えている。

- (1) 市場価格が本論文のプライシングモデルにて表現されている信用リスク以外のリスク、例えば流動性リスクや利払い消滅リスク、償還時期の不確実性をも織り込んでプライシングされていること
- (2) アウトサイダーである投資家が入手できる発行体の財務データの量や正確性に問題があることから、プライシングモデルにおける情報 (フィルトレーション) の前提が現実世界の事態と整合的でないこと

本論文では上記仮説のうち、(2) の要因に着目して不完全情報の再設定をおこなっている。図4では、発行体の資産価値 V_0 の不完全情報の程度を与える会計情報ノイズを $\sigma_{AN} = 50\%$ として、AT1 債のモデル価格 $P_{t,T}^{ACC,PONV,Imp}$ を算出している。その結果、POP_AT1 債のモデル価格である $P_{t,T}^{ACC,PONV,Imp}$ は、発行体であるバンコ・ポプラーに対してバイルインが実施される約1年前の2016年6月から、2016年度第4四半期 (2016年度決算) が発表された直後である2017年2月下旬頃までの期間において、市場価格の推移にある程度整合的な数値が算出される結果となった。

一方で、2017年2月下旬以降、一時的に市場価格がモデル価格を上回る形で大きく乖離した期間があったことが確認できる。モデル価格については、2016年度決算が発表当初、最終赤字は約34億85百万ユーロ、グループ連結 CET1 比率も2016年度第3四半期の15.29%から12.12%へと低下したことが報告されたことから、当該状況が反映された各種パラメータ等の推移を反映し、比較的低水準のモデル価格が算出されたものとみられる。裏を返せば、当該期間の市場価格の上昇はAT1債の信用リスクでは説明が難しい要因によってもたらされた可能性があることが示唆される結果となった。

その後、バンコ・ポプラーは2017年4月3日にCNMV (スペイン証券市場委員会) に提出した監査済年次決算報告書の追加情報を反映して決算情報の修正をおこなった^{*14}。その結果、2016年度の最

^{*14} 詳細は Banco Popular - 1st Quarter 2017 Quarterly Reports に記載されている。

終赤字は約 34 億 85 百万ユーロから約 36 億 11 百万ユーロへ、グループ連結 CET1 比率は 12.12% から 11.53% へと下方修正がなされた。POP_AT1 債の市場価格が 2017 年 4 月上旬以降徐々に低下する推移をみせているのは、発行体の決算情報の正確性、および決算下方修正の事実を懸念した投資家が AT1 債を売却しようとする行動に出た可能性が要因の一つとして考えられる。

POP_AT1 債の市場価格は、2017 年の 5 月中旬には本論文のモデル価格を完全に下回る推移をみせることとなった。その後一時もつれる場面もみられたものの、最終的には大きく下落に転じ、2017 年 6 月のバイルインを迎える結果となった。ブルームバーグの 2017 年 5 月 20 日付記事においては「(2017 年 5 月) 16 日にエスパニョール銀 (バンコ・ポプラー) は同行の買収に関心がないかと、競合銀行に打診した。その翌日には不動産会社の持ち株を売却して資金を調達し、18 日には自行が発行した高リスク債券について 7 月の利払いを実施できると発表し、市場の不安解消に努めた」と報じている。2017 年 5 月中旬以降の市場価格の急激な下落は、発行体の信用力ないしは AT1 債の信用リスクが投資家に十分に認知されたために、POP_AT1 債の保有者が自らの売却したい価格で売却できない流動性リスクによってもたらされた可能性が推測される。

本論文の AT1 債のプライシングモデルは、AT1 債の市場価格を「当てる」ことを目的とするものではない。本論文の AT1 債プライシングモデルは、財務データや市場データ、AT1 債の契約条件によってもたらされる信用リスクの一部を反映させたものである一方、現実の AT1 債の市場価格は、多くの場合において本論文の AT1 債プライシングモデルに織り込まれた要素のみを反映して決定されている訳ではないからである。

むしろ、プライシングモデルから算出されたモデル価格が示唆する事象について読み取ることや、モデル価格と市場価格を比較することを通して、主に信用リスクの観点から AT1 債の特徴について理解を深めていくことを主眼としている。

上記の観点でいえば、本論文のプライシングモデルは、債券の信用リスクが反映されたモデル価格という尺度によって AT1 債と普通社債の差異を可視化したということに一定の貢献があったといえるだろう。さらに、発行体について不完全な情報しか得られない状況で算出されるモデル価格が、特に AT1 債において、完全情報の下で算出されるモデル価格から著しくかけ離れた値になってしまうリスクがあることについても認識するに至った。

また、モデル価格と市場価格の差異について、現実の世界で発生した事象を踏まえながら分析をおこなうと、信用リスクに裏付けられたモデル価格を基準に市場価格の妥当性について考察を与えることが可能となる。また、信用リスクだけでは説明の難しい要因によって AT1 債の市場価格が変動するリスクについて認識することが可能となったという点でも、一定の成果を得られたものと考えられる。

4 まとめと今後の課題

本論文では、金融機関が発行するハイブリッド証券の一種である「バーゼル III 適格 Additional Tier 1 債券 (AT1 債)」について、先行研究を拡張したプライシングモデルの設定と、実際に発行された日欧二つの債券を用いての実証分析をおこなった。

1 節で述べたように、本論文におけるモチベーションとして、実証分析を通して明らかにしようとする課題を以下のように設定した。

- (1) 財務トリガーや PONV トリガーへの抵触条件を適切に定式化することで、構造型モデルの枠組みで AT1 債のプライシングモデルを設定すること。

- (2) 投資家は発行体の資産価値に対して不完全情報しか持ちえないということをプライシングに反映させる適切なモデルを設定すること。
- (3) 本論文で提案するプライシングモデルに基づく理論価格と実際の AT1 債の市場価格を比較して、本論文で提案するプライシングモデルの有用性について検討すること。

これらの課題に対しては、主に以下のような形で成果が得られた。

- (1) 従来のモデルでも取り入れられていた「財務トリガー」だけでなく、外生的に扱われることが多い「PONV トリガー」についても、ある閾値に対する発行体の資産価値過程の初到達条件として特徴付けをおこなった。その結果、構造型モデルの枠組みでプライシングモデルを完結させることができ、資産価値の変動リスク、AT1 債の有する強制元本削減トリガー条項、AT1 債の条件付消滅確率、およびモデルの与える理論価格などの関係を、財務状況という視点で統一的に解釈できるようになった。
- (2) 発行体の資産価値過程を直接観測することが不可能であるという不完全情報アプローチの枠組みでの AT1 債のプライシングモデルを議論し、特に真の資産価値が対数正規分布に従うという単純な仮定の下で、AT1 債の理論価格シミュレーションがおこなえるモデルを導入した。
- (3) 実際に発行されている日欧二つの AT1 債の契約条件および市場データから推定されたパラメータを用いて、本論文で提案する「財務トリガーおよび PONV トリガーを資産過程の初到達条件として定式化する構造型の不完全情報プライシングモデル」に基づく理論価格のシミュレーションを実施し、従来の構造型モデルと提案モデルの理論価格の差異、および市場価格と提案モデルの理論価格との乖離状況を観察した。その結果、市場価格が相対的に低い局面において、本論文で新たに提案した AT1 債プライシングモデルが他の構造型モデルと比べて市場価格に近い水準で推移している状況がいくつか観測され、提案した AT1 債プライシングモデルは課題が残っているが、適切に改良することで実務への応用可能性が十分にあると推察される。

最後に、本論文の追加的な課題について述べておく。

本論文で設定したプライシングモデルは、モデルの設定者によってさらなる追加的な拡張が可能であると考えている。例えば、AT1 債にかかる利払い消滅のリスクをモデル価格に織り込むことを検討するのであれば、発行体の資産価値過程や CET1 比率過程に対して、一定の水準を下回った際に利息の支払いを制限するような停止時刻を設定することで、当該リスクをモデル価格に反映させることができるだろう。

ただし、プライシングモデルの設定においてモデル設定者が独自に決定する要素が多くなりすぎると、モデル価格が恣意性を増す要因につながったり、モデル価格の解釈が困難になったりする恐れが生じる。プライシングモデルを設定する際には、どのような特徴をモデルに組み込むべきか、また逆に、どのような特徴を「組み込んでいないか」をモデル使用者と共有することが重要であるといえよう。

また、発行体の資産価値と CET1 比率の関係式について、本論文では Rösler [16] の手法に倣って設定をおこなったが、変換式のパラメータを推定するにあたり、発行体の財務データとバーゼル規制上の一指標である CET1 比率の関係はそれほど単純ではない。

BCBS [3] では、「バーゼル III の最終化」として、主に銀行間におけるリスクアセット算出における「過度なばらつき（“excessive variability”）」を軽減するため、リスクアセットの計上方法の見直しが行なわれた。リスクアセットは規制上の自己資本比率を算出する際の「分母」に用いる数値であり、当該基準が変化すると、基準変更前後のデータをそのままの形でパラメータ推定の際に用いることが難し

くなる可能性がある^{*15}。そのため、本論文の構造型プライシングモデルのフレームワークにおいては、CET1 比率過程を合理的にモデル化する方法について、さらなる検討の余地があると考えている。

付録 A 完全情報下での条件付き生存確率

2.1.5 節で検討した、完全情報下での条件付き生存確率 $\mathbf{Q}(\tau \wedge \theta_{\text{ACC}} > t_i \mid \mathcal{G}_t)$ の計算は、(17) 式で定義される関数 $F(t, u; x, y)$ に帰着することを示した。本文において実証分析においては、この関数に相当する部分の計算をナイーブなモンテカルロ・シミュレーションでおこなっているが、で定義される確率過程 $(X_s)_{s \leq t}$ がドリフト付きのブラウン運動と見なせることから、ある程度解析的に議論することも可能である。

ただし、計算においては確率過程 (X_s) の有限区間 $[t, u]$ ($t < u$) における最小値の挙動を考える必要があるが、財務トリガー条件に関しては $[t, t_i] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}$ という離散時点上の最小値しか考えていないことに注意する必要がある。なお、ここでは簡単のため、発行体の四半期決算時点の離散時刻集合 $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k - t_0 \mid k \in \mathbb{N}\}$ について $t_0 =$ を仮定して $\mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25, 0.5, 0.75, 1, \dots\}$ として考えることにする。

もし $[t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}} = \emptyset$ のときは、 $\inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y$ という条件について考える必要がないので、Bielecki et al. [4] の Proposition 1.3.3 より

$$\begin{aligned} F(t, u; x, y) &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, \inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y \mid X_t = 0 \right) \\ &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x \mid X_t = 0 \right) \\ &= p_{u-t}(x) \end{aligned} \tag{30}$$

となる。

ただし、 $u > 0, x \leq 0$ に対して $p_u(x)$ を

$$\begin{aligned} p_u(x) &:= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0, u]} \tilde{X}_s > x \right) \\ &= \Phi \left(\frac{-x + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})u}{\sigma_V \sqrt{u}} \right) - e^{\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma_V^2} - 1 \right)x} \Phi \left(\frac{x + (r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2})u}{\sigma_V \sqrt{u}} \right) \end{aligned} \tag{31}$$

と定義している。なお、 $\tilde{X}_t = \left(r - \delta - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) t + \sigma_V W_t$ としており、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布関数である。

次に、ある $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}$ に対して、 $[t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k \mid k = j+1, \dots, j+n\}$ となってい

^{*15} BCBS [3] によれば、本資料にて定められた基準は 2022 年 1 月 1 日から適用（一部の項目は段階を踏んでの適用）開始となることである。

るときは

$$\begin{aligned}
F(t, u; x, y) &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, \inf_{s \in [t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}}} X_s > y \mid X_t = 0 \right) \\
&= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, u]} X_s > x, X_{0.25(j+1)} > y, \dots, X_{0.25(j+n)} > y \mid X_t = 0 \right) \\
&= \int_y^\infty \cdots \int_y^\infty \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0.25(j+n), u]} X_s > x \mid X_{0.25(j+n)} = x_n \right) \\
&\quad \times \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0.25(j+n-1), 0.25(j+n)]} X_s > x, X_{0.25(j+n)} = x_n \mid X_{0.25(j+n-1)} = x_{n-1} \right) \\
&\quad \times \cdots \times \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [t, 0.25(j+1)]} X_s > x, X_{0.25(j+1)} = x_1 \mid X_t = 0 \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n
\end{aligned}$$

と表すことができる。

まず, (31) 式を用いると, $\mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0.25(j+n), u]} X_s > x \mid X_{0.25(j+n)} = x_n \right) = p_{u-0.25(j+n)}(x - x_n)$ と表されることに注意する。

さらに, 一般的に $u_1 < u_2$ および $x \leq y, x \leq 0$ に対して, $\mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [u_1, u_2]} X_s > x, X_{u_2} = y \mid X_{u_1} = z \right)$ は $\mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0, u_2-u_1]} X_s > x-z, X_{u_2-u_1} = y-z \mid X_0 = 0 \right)$ と等しいことが分かる。したがって, $x-z$ を反射壁とする $(\tilde{X}_s)$ の (斉時的な) 推移密度関数として求めることができる。これを $q_{u_2-u_1}(z, y; x)$ とおく。

Bielecki et al. [4] の Proposition 1.3.3 より,

$$\begin{aligned}
q_{u_2-u_1}(z, y; x) &= \mathbf{Q} \left(\inf_{s \in [0, u_2-u_1]} X_s > x-z, X_{u_2-u_1} = y-z \mid X_0 = 0 \right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \Phi \left(\frac{-(y-z) + (r-\delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2-u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2-u_1}} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma_V^2} - 1 \right)(x-z)} \Phi \left(\frac{(2x-y-z) + (r-\delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2-u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2-u_1}} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{\sigma_V \sqrt{2\pi(u_2-u_1)}} \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{-(y-z) + (r-\delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2-u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2-u_1}} \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. \exp \left(\left(\frac{2(r-\delta)}{\sigma_V^2} - 1 \right)(x-z) - \frac{1}{2} \left(\frac{2x-y-z + (r-\delta - \frac{\sigma_V^2}{2})(u_2-u_1)}{\sigma_V \sqrt{u_2-u_1}} \right)^2 \right) \right\} \\
&=: q_{u_2-u_1}(z, y; x) \tag{32}
\end{aligned}$$

が得られることに注意する。

よって, (31), (32) 式の表記を用いると, $[t, u] \cap \mathcal{T}_{\text{qtr}} = \{0.25k \mid k = j+1, \dots, j+n\}$ のとき, 条件付き生存確率は

$$\begin{aligned}
F(t, u; x, y) &= \int_y^\infty \cdots \int_y^\infty p_{u-0.25(j+n)}(x - x_n) \left[\prod_{j=2}^n q_{0.25}(x_{j-1}, x_j; x) \right] \\
&\quad \times q_{0.25(j+1)-t}(0, x_1; x) dx_1 \cdots dx_{n-1} dx_n
\end{aligned}$$

という n 重積分で計算することができる。

参考文献

- [1] Basel Committee on Banking Supervision. “Basel III: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems,” *Bank for international Settlements*, 2011.
- [2] Basel Committee on Banking Supervision. “Composition of capital disclosure requirements: Rules text,” *Bank for international Settlements*, 2012.
- [3] Basel Committee on Banking Supervision. “Basel III: Finalising post-crisis reforms,” *Bank for international Settlements*, 2017.
- [4] Bielecki, T. R., Jeanblanc, M., and Rutkowski, M. *Credit Risk Modeling*, Osaka University Press, 2009.
- [5] Black, F. and Cox, J.C. “Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions,” *Journal of Finance*, 31:351-367, 1976.
- [6] De Spiegeleer, J. and Schoutens, W. “Pricing contingent convertibles: A derivatives approach,” *Journal of Derivatives*, 20:27-36, 2012.
- [7] De Spiegeleer, J. and Höcht, S. and Marquet, I. and Schoutens, W. “CoCo Bonds and Implied CET1 Volatility,” *Quantitative Finance*, 17:813-824, 2017.
- [8] Duffie, D. and Lando, D. “Term structure of credit risk with incomplete accounting information” *Econometrica*, 69:633-664, 2001.
- [9] Frey, R., Rösler, L. and Lu, D. “Corporate Security Prices in Structural Credit Risk Models with Incomplete Information,” *Working paper* (<http://statmath.wu.ac.at/~frey/publications/corporate-security-dynamics.pdf> 最終アクセス日 2018 年 8 月 1 日), 2014.
- [10] Frey, R. and Schmidt, T. “Pricing corporate securities under noisy asset information,” *Mathematical Finance*, 19:403-421, 2009.
- [11] Karatzas, I. and Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus: 2nd edition*, Springer-Verlag New York, 1998.
- [12] Leland, H. E. and Toft, K. “Optimal Capital Structure, Endogenous Bankruptcy, and the Term Structure of Credit Spreads” *Journal of Finance*, 51:987-1019, 1996.
- [13] Liberadzki, K. and Liberadzki, M. *Hybrid Securities: Structuring, Pricing and Risk Assessment*, Palgrave Macmillan, 2016.
- [14] McNeil, A. J., Frey, R., and Embrechts, P. *Quantitative Risk Management*, Princeton University Press, 2nd edition, 2015.
- [15] Merton, R. C. “On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates,” *Journal of Finance*, 29:449-470, 1974.
- [16] Rösler, L. “Stochastic Filtering in Pricing and Credit Risk Management,” *PhD thesis*, TU Wien (<http://katalog.ub.tuwien.ac.at/AC13002123> 最終アクセス日 2018 年 8 月 1 日), 2016.